A halmazok, logika és kombinatorika oktatásáról a matematikai műveltségterületen

Kórus Péter
korus.peter@szte.hu
SZTE JGYPK Alkalmazott Pedagógiai Intézet

Krisztin Német István
krisztin.nemet.istvan@szte.hu
SZTE JGYPK Alkalmazott Pedagógiai Intézet

Tanulmányunkban a Szegedi Tudományegyetem Juhász Gyula Pedagógusképző Kar Alkalmazott Pedagógiai Intézet Tanítóképző Tanszéken folyó, tanító szakosoknak szóló, *A matematika alapjai* című kurzus felépítésével, tartalmával, oktatásával foglalkozunk. Ezen kurzus fő témái a logika, a halmazok, a kombinatorika, illetve a valószínűség kombinatorikai alapjai.

Kulcsszavak: *tanítóképzés, matematika műveltségi terület, a matematika alapjai*

⁕

A matematika alapjai című kurzusról

Tanulmányunkban az SZTE JGYPK API Tanítóképző Tanszéken folyó, tanító szakosoknak szóló, *A matematika alapjai* című kurzus felépítésével, tartalmával, oktatásával foglalkozunk. Ezen kurzust a leendő tanítók közül azok végzik, akik a matematikát választották műveltségi területüknek. A fő témák a halmazok, a logika, a kombinatorika, illetve a valószínűség kombinatorikai alapjai. A témákat heti négy órán át, kétszer két órában tanulmányozzuk: a kurzus egyik felében a halmazok és a logika, míg a másik felében a kombinatorikai témák kerülnek feldolgozásra. A hallgatók a szemeszter elején egy-egy elektronikus jegyzetet kapnak segítségül a kurzus elvégzéséhez, e jegyzetek tartalmazzák a főbb elméleti ismereteket és gyakorlati példákat.

A kurzus halmazokkal és (matematikai) logikával foglalkozó részének tanításához több felsőoktatási tankönyv, illetve jegyzet is rendelkezésre áll (*Szendrei* és *Tóth*, 1996; *Pappné*, 2004; *Szendrei*, 2006; *Vármonostory*, 2007). Természetesen ezeknek csak egyes részei használhatók itt fel, hiszen jóval többet tartalmaznak, mint amennyi ezen kurzus elvégzéséhez szükséges. A kurzus feladataihoz és lehetőségeihez talán Vármonostory Endre tankönyve áll (*Vármonostory*, 2007) legközelebb, ezért több évig ezt a tankönyvet is dolgoztuk fel, pontosabban ennek első felét. De ez a könyv elsősorban a matematika szakos tanárképzés részére íródott, ezért annak követelményeihez, céljaihoz, lehetőségeihez igazodik. Emiatt egyszerre „sok" és „kevés" is a tanítóképzés számára. „Sok", hiszen több anyagot tartalmaz és azt mélyebben tárgyalja, mint amennyire az a tanítóképzésben szükséges és lehetséges. Ugyanakkor „kevés", mert azokat a részeket, amelyek szükségesek, „nem járja körül eléggé". De ez természetes is, hiszen „haladnia kell" a többi anyagrész megfelelő szintű tárgyalása érdekében. Szalay István a tanítók alapképzéséhez írott tankönyvében (*Szalay*, 2010) ezt a „kettős problémát" igyekezett orvosolni: a könyv mottója „Kevesebbet, de mélyebben". Ez több szempontból sikerült is neki; sok részletet merítettünk e könyvből a kurzus jelenlegi anyagának összeállításához.

A kurzus első óráját majdnem teljes egészében az „ismerkedésre" fordítjuk. A műveltségi terület alacsony hallgatói létszáma megengedi, hogy mindenki – az oktató is – elmondja, hogyan alakult és milyen a „viszonya" a matematikához, miért ezt a területet választotta. Ezzel közvetlenebbé, „személyesebbé" is válik a tanítási-tanulási folyamat, ami tapasztalatunk szerint segít a kezdeti „félelmek", nehézségek oldásában.

A műveltségterület további specialitása, hogy egy „átmeneti időszakra" kell felkészítenie a hallgatót: az alsó tagozat „szemléletes", sokszor „játékos" megközelítése után ekkor kezdődik meg a matematika „deduktív", „szabályszerű" oktatása. Ebben a „váltásban" központi szerepe van a logikának és a halmazoknak, mind a matematikai tartalom, mind annak nyelvi megformálása szempontjából. Továbbá a matematikai témakörök közül ezen a szinten a logika és a halmazok témaköréhez lehet a legtöbb közéleti témát, gondolatot kapcsolni, ez pedig segít a matematikai gondolatok megértetésében.

Ezen jellemzők, meggondolások alapján igyekeztünk összeállítani a halmazok-logika tananyagot és annak feldolgozási módját. A félév során egy rövid, mindössze 5 db A4-es oldal terjedelmű dokumentumot dolgozunk fel, amely a feladatokat és a szükséges elméleti összefoglalót is tartalmazza. Természetesen – megfelelő ismétlés után – támaszkodunk az alapképzés matematikaoktatására, az ott már feldolgozott anyagra is. Főleg a *Matematika II. gyakorlat*ra építünk, ahol a halmazok és a logika témakörét tárgyaltuk; itt ezt fejlesztjük tovább. De előkerülnek a *Matematika I.* gyakorlat geometriával, függvényekkel és természetes számokkal kapcsolatos témái, valamint a *Matematika II. előadás* egyes részei is. Ezáltal bizonyos értelemben a korábban elsajátított tudást is rendszerezzük, összefoglaljuk. Ugyanakkor elő is készítünk, ha a matematika műveltségi terület további kurzusaira tekintünk: az itt érintett gondolatok, témák gyakran előkerülnek majd az *Algebra*, a *Geometria*, a *Függvények* és a *Matematika tantárgy-pedagógia* kurzusokon is. Az első olvasásra talán meglepően kevés anyag képes kitölteni a kurzust: éppen ez a – korábban már említett – „kevésség" ad lehetőséget az érintett témákban való megfelelő „elmélyedésre".

A kurzus kombinatorikai és valószínűségi témáival foglalkozó részéhez a Sokszínű matematika tankönyveket és feladatgyűjteményeket ajánljuk a hallgatóknak (*Csordás, Konfár, Pintér, Vincze, Kozmáné és Kothencz*, 2008; *Árki, Konfárné, Kovács, Trembeczki és Urbán*, 2009; *Kosztolányi, Kovács, Pintér, Urbán és Vincze*, 2009). Ezekben a tankönyvekben jóval több elméleti anyag és gyakorlati példa található, mint amenynyi a kurzus során feldolgozásra kerül, és nem is elvárás, hogy a tanító hallgatók ilyen szinten ismerjék a kombinatorikai és valószínűségi témákat. Azonban hasznos lehet, ha valahol utána tudnak nézni fontos fogalmak pontos leírásának, vagy ötletet tudnak meríteni leendő óráikhoz, például néhány érdekes, könyvbeli példán keresztül. Az órán használt kombinatorikai fogalmakat és példákat egy 11 db A4-es oldal terjedelmű dokumentumban gyűjtöttük össze, amit a félév során feldolgozunk, de akár később is használhatják a tanítók a témák egy rövid összefoglalásaként.

Logika, halmazok

A logika és halmazok rész témái: állítás, műveletek állításokkal (tagadás, és, vagy, vagy-vagy, ha-akkor), egyenértékűség, feltételek (szükséges, elégséges), kvantorok (minden, van olyan), kizárólagosság (egyetlen, csak akkor), formalizálás, következmény, bizonyítás; halmazműveletek (részhalmaz, unió, metszet, különbség, Descartes-szorzat), halmazok ugyanannyi eleműsége vagy ekvivalenciája, halmazok végessége-végtelensége. Ezek a témák azok közül valók, amelyek „klasszikusan szerepelni szoktak” egy ilyen bevezető jellegű kurzusban. Természetesen a tanítóképzés speciális helyzete miatt egyrészt itt nem olyan mélységben dolgozzuk fel ezeket, mint akár a tanárképzésben, másrészt itt ki is maradnak témák, amelyek más szinten előkerülnének.

A feldolgozott témákkal kapcsolatban néhány dolgot kiemelünk. Rögtön az „állítás” fogalmával kapcsolatban meglepődnek a hallgatók, és olyan problémával találják magukat szemben, amellyel eddig nem nagyon találkoztak. Az „állítás” matematikai definíciója: állításnak nevezzük az olyan kijelentő mondatot, amely vagy igaz, vagy hamis. (Tehát a két lehetőség közül az egyik biztosan fennáll, de egyszerre a kettő nem.) A kijelentő mondat fogalmát a nyelvtanból ismerik a hallgatók, ezzel nincs gond. De mit jelent az, hogy „igaz”, illetve „hamis”, és ezeket honnan tudjuk? Meglepődnek, hogy ez nem is olyan egyszerű dolog, még egyértelműnek látszó helyzetekben sem. Eddig nem tudatosult bennük, hogy az igaz-hamis probléma megoldása minden esetben egyrészt a pontos fogalmakon múlik: tehát a kijelentésben szereplő összes fogalomról egyértelműen tudnunk kell, hogy azok mit jelentenek, másrészt a valamire való hivatkozáson múlik: tehát kell lennie valami „alap”-nak, ami alapján döntünk. Ezekre a szempontokra mutatunk rá, példákkal. Pl. az „*A legszebb szín a piros.*” kijelentő mondatról érzik, hogy nem állítás, mert az szubjektív, hogy kinek mi a szép. Tehát ez nem állítás, mert van, aki szerint igaz, és van, aki szerint nem igaz. Ezután a hallgatók már könnyen eldöntik, hogy a „*Van olyan ember, aki szerint a legszebb szín a piros.*” mondat egy igaz állítás: mert ismernek olyan személyt, akinek valóban a piros a legszebb; a „*Minden ember szerint a legszebb szín a piros.*” mondat pedig egy hamis állítás: mert ismernek olyan személyt, akinek nem a piros a legszebb szín. Itt tehát megjelenik az igaz-hamis probléma egyedi-általános szempontja, ami pontos fogalmazással „kezelhető”. De ilyen állítással is lehet probléma. Pl. a „*Van olyan ember, akinek 123.456 szál haja van.*" kijelentő mondatnál a hallgatók elbizonytalanodnak, és nem tudják, igaz vagy hamis, és ezért nem is biztos, hogy állítás. A megbeszélés után megértik, hogy ez igenis állítás, tehát vagy igaz, vagy hamis, csak jelenleg „fizikailag" nem tudjuk megmondani, a kettő közül melyik, hiszen „fizikailag" nem tudjuk az egyes emberek hajszálait egyenként megszámolni. Természetesen rámutathatunk más problémákra is az előző példákkal kapcsolatban: pl. mit jelent az, hogy „piros"? Vannak olyan mondatok is, amelyeknél a hallgatók nem éreznek problémát. Pl. a „*Ma 2021. szeptember 16. van.*" kijelentő mondatról aznap mind úgy gondolták, hogy ez egy igaz állítás. A probléma ott kezdődik, hogy ezt honnan tudjuk. Nyilvánvalóan megnézzük a naptárban. De azt honnan tudjuk, hogy a naptár „jó", hogy arra hivatkozhatunk? Ez „csak" egy megállapodás: mi most az ún. Gergely-naptárt használjuk. Vannak, akik más naptárt használnak, számukra ez egy hamis állítás. Itt tehát megjelenik az „alap", amiben „megegyezünk", amire „hivatkozunk", amit „elfogadunk igaznak"! Ugyanez a helyzet – csak még „megdöbbentőbb" a hallgatók számára – a „*2×2=4.*" és a „*2×2=5.*" kijelentő mondatokkal. Az elsőt mind igaz állításnak mondják, a másodikat mind hamis állításnak, de itt sem tudják, miért. Itt visszautalunk a Matematika II. előadáson elmondottakra: ott több „alap"-ból kiindulva is felépítettük a természetes számok, köztük a 2, a 4 és az 5 fogalmát, az egyenlőség és a szorzat fogalmát, majd az adott „alap"-ra hivatkozva bizonyítottuk a „*2×2=4.*" állítás igazságát. Tehát a matematika nem egyszerűen azt mondja, hogy a „*2×2=4.*" mondat egy igaz állítás, a „*2×2=5.*" mondat pedig egy hamis állítás, hanem azt, hogy ha az adott „alap"-ban lévő kijelentő mondatok igaz állítások, akkor a „*2×2=4.*" kijelentő mondat is igaz állítás, a „*2×2=5.*" mondat pedig hamis állítás. Mindez meglepő a hallgatók számára! Ezért is foglalkozunk vele többször. Ezek a tapasztalatok kezdik megértetni a hallgatókkal, hogy a matematikában miért kell az „alapokat" nagyon pontosan megadni, minden fogalmat és állítást nagyon precízen megfogalmazni, és minden új igaz állítás igazságát részletesen bebizonyítani.

Az állítások egyenértékűségének (egyenlőségének) kérdése is fontos téma. Eleinte az ilyen kérdéseket a „józan ész" alapján és „szemléletesen" próbáljuk eldönteni – így teszünk a Matematika II. gyakorlaton is –, de bonyolultabb esetekben ez a módszer már „kevés". Ez mutatja, hogy a továbbhaladáshoz szükséges az absztrakció, az elvonatkoztatás, az „elmélet". Pl. összetett állítások tagadásának vizsgálatánál tudjuk ezt jól bemutatni. Ha a példamondat az, hogy „*Vettem kenyeret és (vettem) tejet.*", akkor hogyan fogalmazhatom át ennek tagadását, a „*Nem igaz az, hogy vettem kenyeret és tejet.*" mondatot? A Matematika II. gyakorlaton „szemléletes" eszközök használatával arra jutottunk, hogy ez a „jó" átfogalmazás: „*Nem vettem kenyeret vagy (nem vettem) tejet.*". Akkor még elég volt ez az eszköz, mert ott még csak az alsó tagozatra készítünk fel, ahol „elegendő a szemléletesség". De ez még nem „pontos matematikai bizonyosság", ami a későbbiekben már szükséges. Ezen a kurzuson már pontosan meg tudjuk tenni a bizonyítást a megfelelő eszközök bevezetésével. Ugyanilyen „szintlépésre" kerül sor állítások formalizálásával kapcsolatban is. A korábban említett könyvekben szerepelnek magyar közmondások, amelyek vizsgálata nagyon tanulságos: pl. „*Ki korán kel, aranyat lel.*". Feltárjuk, mi ennek a kijelentő mondatnak a logikai szerkezete, hogyan lehet tagadni, illetve megfordítani. Az ilyen vizsgálatok az oktatásban majd pl. a geometria vagy a számelmélet egyes részeinél lesznek fontosak: pl. „*A négyzet egyben téglalap is.*", „*A 6 többszörösei egyben a 3 többszörösei is.*".

A következtetés és a bizonyítás témájával zárul a logika rész. Sokszor használjuk a „következtetés", a „következmény" szavakat a közéletben is. Itt most pontosítjuk ezek matematikai jelentését és használatát, ezzel rámutatva több közéleti „tévedésre" is. Pl. a „*Ha esik az eső, akkor kinyitom az ernyőm.*" és a „*Nem esik az eső.*" mondatokból a közélet hajlamos azt a következtetést levonni, hogy „*Nem nyitom ki az ernyőm.*". Pedig matematikai értelemben ez nem következik belőlük. E téma kapcsán ejthetünk szót olyan, a közéletben gyakran hallott kifejezésekről is, mint a „nem feltétlenül", a „következmények nélküli" vagy a „kettős mérce". A következmény fogalma után kerülhet sor néhány bizonyításra. A közoktatás matematikájában ez a téma visszaszorulóban van, kevés tapasztalatuk van a hallgatóknak. A Matematika I. és II. kurzusokon foglalkoztunk néhány ilyen példával, de főleg „konkrét" esetekkel és „szemléletes" eszközökkel, ugyanis alsó tagozaton ez a kérdés még nem fontos. De a felső tagozaton már előkerülnek olyan témák, illetve kérdések, amelyeket csak akkor tud a tanár pontosan tárgyalni, illetve megválaszolni, ha – a szükséges szintig – tisztában van a bizonyítással. Igyekeztünk olyan példákat összeválogatni, amelyek ismerős problémákat érintenek, továbbá elég egyszerűek, hogy meg tudjuk oldani, de azért valamilyen szinten „kihívást" is jelentenek a hallgatóknak. Pl.: „*Páros természetes számok összege biztosan páros?*". „*Szabályos háromszög minden szöge biztosan 60°?*". „*Az az eljárás, amelyet szabályos hatszög szerkesztésére adunk, biztosan helyes*?". „*Ha 1-től kezdve az összes páratlan számot összeadjuk valameddig, akkor biztosan négyzetszám lesz az összeg*?". Természetesen előre lerögzítjük azt az „alap"-ot, amelynek igazságára hivatkozva kijelenthetjük ezek igazságát is.

A halmazok témájának tárgyalása eleinte kevesebb problémát rejt. Ismételjük a korábban már tanult fogalmakat, ezekkel a korábbiaknál már bonyolultabb feladatokat oldunk meg. A feladatok a közoktatásból is már ismerős, ott sűrűn előforduló halmazokhoz kapcsolódnak (pl. természetes számok többszörösségével kapcsolatos halmazok, a számegyenes halmazai, egy osztály tanulóinak halmazai).

A nehezebb részek később jelentkeznek, ahol kevésbé ismert vagy esetleg teljesen új fogalmak kerülnek elő, továbbá ott, ahol a halmazoknak a matematika többi részterületében betöltött szerepéről van szó. Ilyen új fogalom pl. a halmazok Descartes-szorzatának fogalma, amely – „szemléletesen szólva" – bizonyos elempárok halmazát jelenti. Ezt azért kell tárgyalni, mert központi szerepet tölt be olyan fontos és gyakran használt matematikai fogalmak esetében, mint a reláció, a hozzárendelés, a művelet. Egyszerű és „szemléletes" példákkal igyekszünk e téma matematikai tartalmát „érzékeltetni". Ehhez persze valamennyi elvontság és formalizmus mindenképpen szükséges, de csak annyit alkalmazunk, amennyinek a megértése ezen a szinten szükséges és el is várható.

A másik, több témában is fontos fogalom a halmazok ugyanannyi eleműsége (ekvivalenciája). Ez nem teljesen ismeretlen, mert a Matematika II. gyakorlaton és előadáson már szerepelt. Ennek ellenére mindenképpen ismétlésre szorul: újból feldolgozzuk a korábbról ismert példákat, amelyek között olyan „meglepő" eredmény is szerepel, mint pl. az összes természetes szám halmaza ugyanannyi elemű a páros természetes számok halmazával. A továbbiakban két másik témához is kapcsoljuk az ugyanannyi eleműség fogalmát. Egyrészt e fogalmat „megközelítjük" a függvény fogalmával is, másrészt e fogalommal adjuk meg a végtelen halmaz fogalmát. Halmazok végességét-végtelenségét korábban, a Matematika II. gyakorlaton már érintettük, de ott csak „szemléletes" alapon. Itt, ezen a matematika műveltségi területes kurzuson már meg lehet kísérelni a továbblépést a „matematikailag pontos" fogalomra.

Egy halmaz véges vagy végtelen volta már a közoktatásban is előkerül valamilyen szinten, ez egy „érdekes" téma. De, sajnos, tapasztalatunk szerint túl gyakran használják a „végtelen" szót az oktatásban: olyankor is említik, amikor nem kellene, vagy nem ezt kellene. Ezáltal pedig „összekeverednek" bizonyos fogalmak tartalmai, és „ellentmondásossá" válik az adott téma. Azért is hozzuk szóba e kurzuson is a végtelenség kérdéskörét, hogy felhívjuk a figyelmet a „veszélyekre" is. A matematika ugyanis több szempontból is vizsgálja a „végesség – vég nélküliség" kérdéskört. A véges, illetve végtelen halmaz mellett idetartoznak pl. a „korlátos, illetve nem korlátos" szám- vagy ponthalmaz fogalompárok is, amelyeket a Matematika I. és II. gyakorlatokon már érintettünk. Továbbá később, a műveltségterület Geometria kurzusán vázlatosan szó lesz majd a „határolt, illetve határtalan", a „nyílt, illetve zárt" és a „van, illetve nincs hossza (területe)" fogalompárokról is. Itt, a halmazok kapcsán, néhány példát említünk az e fogalmak közti különbségek „érzékeltetésére".

Természetesen az előbb említett nehéz témákat mind csak a feltétlenül szükséges szintig és kellő óvatossággal tárgyaljuk, hiszen ezek mélyebb megértéséhez komoly absztrakciós képesség és sok előismeret kell.

Kombinatorika, valószínűségi alapok

Az összeszámlálás, a rendszerezés, amik a kombinatorika alapjainak tekinthetők, már az alsó tagozaton megjelennek a matematikai oktatásban, ahogy az a 2020-as NAT-hoz illeszkedő tartalmi szabályozók között is olvasható (*Kerettanterv az általános iskola 1–4. évfolyama számára – Matematika 1–4. évfolyam*). A „Rendszerezés, rendszerképzés" témakörben az elemek rendszerezéséhez többféle módszer is használatos, az egyszerű felsorolás mellett a táblázatos elrendezés és a fadiagram (ágrajz) is szerepet kap. Ezen módszerek elsajátítása, gyakorlott használata természetesen fejleszti a gyerekek gondolkodását, ráadásul összeszámlálásra minden embernek egész élete során szüksége lehet, akár mindennapi problémák esetén is. Az alsós gyerekek ezen gondolkodási sémákat későbbi tanulmányaik során is sokszor fogják használni, akár továbbfejlesztett formában, absztraktabban, illetve felnőtt munkájuk során is gyakran szükségük lehet rendszerezett gondolkodásukra. Az is könnyedén elképzelhető, hogy attól még, hogy egy felnőtt nem rajzol magának szemléltető segédleteket, aktívan használja azokat, csak éppen gondolatban. Kombinatorikai alapok megjelennek továbbá az alsós „Valószínűségi gondolkodás" témakörben is: véletlen események bekövetkezéseinek összeszámlálása, ábrázolása különféle módokon, például strigulázással, diagrammal, táblázatba rögzítéssel. Az itt megjelenő alapgondolatok is természetesen tovább érlelődnek életünk során: az iskolában, adott esetben az egyetemen vagy a munkában. Emellett a hétköznapok során is folyamatosan találkozunk olyan eseményekkel, amikor hasznos, ha ki tudjuk következtetni, mire érdemes fogadni, mire érdemes számítani, mi valószínű, és mi valószínűtlen.

A kombinatorika alsós része több matematikakurzuson is előkerül a tanító szakos képzésben, ezek minden tanító szakos hallgatónak kötelezően teljesítendő kurzusok során jelennek meg. A diákok több félévben is találkoznak ezen témával (is), ami még inkább elmélyíti, megerősíti, fejleszti tudásukat, ami által nagyobb tudású, magabiztosabb tanítókká válhatnak. Az elsőévesek a Matematika I. gyakorlaton, míg később, a Matematika tantárgy-pedagógia III. gyakorlaton fejlesztik ilyen irányú kompetenciáikat (bővebben itt olvasható erről: *Kórus*, 2017, 2020). Ezen órákon mind a matematika, mind az egyéb műveltségterületet választó hallgatók egyaránt részt vesznek.

Természetesen a felsős diákok is találkoznak az iskolában kombinatorikával a matematikaóráikon (*Kerettanterv az általános iskola 5–8. évfolyama számára – Matematika 5–8. évfolyam*). A „Matematikai logika, kombinatorika" témakörben megfogalmazottak szerint cél, hogy a gyerekek az összeszámlálási feladatok megoldása során tudják alkalmazni az összes eset áttekintéséhez szükséges módszereket. A fejlesztési feladatok közé tartoznak: kis elemszámú halmaz elemeinek sorba rendezése mindennapi életből vett példákkal; néhány számkártyát tartalmazó készlet elemeiből adott feltételeknek megfelelő számok alkotása; az összes eset előállítása során rendszerezési sémák használata (táblázat, ágrajz, szisztematikus felsorolás).

A szemeszter elején a skatulyaelvvel foglalkozunk: ez egy egyszerű állítás, amely néhány perc alatt megfogalmazható, az alapvető műveltség része, és számos alkalmazása van a való életben is. Itt több gyakorlati példát is megoldunk a hallgatókkal, hogy az elv használata világos legyen. Ilyen példa a következő:

– *Egy iskolában 52 tanár van, ill. 745 diák, akik 20 osztályba járnak. A következő állítások közül melyik igaz rájuk?*

a) Biztosan van olyan osztály, amelybe legalább 38 tanuló jár.

b) Biztosan van olyan diák, aki az év ugyanazon napján született, mint valamelyik tanár.

c) Az év minden napján valamelyik diáknak születésnapja van.

d) Biztosan van olyan hónapja az évnek, amelyben legalább 5 tanárnak van születésnapja.

Fontos, hogy akár egy tanító, akár egy diák ne „ész nélkül” álljon neki egy probléma megoldásának, mert, mint azt a fenti példa is mutatja, az, hogy van elméleti tudásunk, még nem jelenti azt, hogy mindig alkalmazható az adott elv (skatulyaelv), sokszor a kézzel felírt próbálkozás a célravezető, ez az általános iskolában is gyakran tetten érhető.

A folytatásban kis elemszámú halmazok elemeinek sorba rendezésével foglalkozunk, a sorrendeket szakszóval permutációknak nevezzük. A középiskolai években ez a szakszó is használatos, és hallgatóink ezt a kifejezést általában ismerik, így használjuk is órákon (a többi, később említett szakkifejezéssel együtt). Azonban a fő szempont a tartalom megjelenítése, hiszen az általános iskolában is ez a lényeges, nem az elnevezés. Általában a mindennapi életből veszünk példákat, először egyszerűbb, később összetettebb feladatokat is megoldunk órán. A következő példa első két része átlagos nehézségű, míg az utolsó két rész nehezebb, gondolkodtatóbb:

– 5 házaspár érkezik vendégségbe.

a) Hányféle sorrendben léphetnek be egyesével az ajtón?

b) Hányféle sorrendben léphetnek be egyesével az ajtón, ha mindegyik férj közvetlenül a felesége után lép be?

c) Hányféleképpen ülhetnek le egy kerek asztal köré?

d) Hányféleképpen ülhetnek le egy kerek asztal köré, ha mindegyik férj a felesége mellett ül?

A halmazok elemeinek sorba rendezése után kiválasztások lehetséges számával foglalkozunk. Amennyiben számít a kiválasztás sorrendje is, variációkról beszélünk. Itt – több egyéb típusú példa mellett – megoldandó probléma lehet néhány számkártyát tartalmazó készlet elemeiből adott feltételeknek megfelelő számok alkotása:

– Hány háromjegyű, páratlan szám készíthető a 0, 1, 3, 5, 7 számkártyákból?

A fenti példa nem triviális, kis kihívást jelenthet, mert nem feltétlenül alkalmazható a középiskolából megszokott „felírok egy képletet, és kész a feladat” hozzáállás, inkább célszerű átgondolni a lehetséges eseteket, akár ágrajz segítségével, vagy éppen szisztematikus felsorolással. Ráadásul a jegyek között a 0 is szerepel, ami kritikus pont tud lenni, gondoljunk csak arra, hogy gyakran keverik a gyerekek, hogy a 0 páros-e, pozitív-e, ezeket is célszerű többször rögzíteni a fejekben.

Amennyiben olyan kiválasztások lehetséges számával foglalkozunk, amelyben a kiválasztott elemek sorrendje nem számít, kombinációkról beszélünk. Itt a legegyszerűbb példák sem triviálisak, azonban a hallgatóknak ebben a témakörben is rendelkezniük kell tudással, gyakorlattal. Például, ha arra gondolunk, hogy „*Hányféleképpen tudunk öt gyerekből kettőt kiválasztani (ha a sorrendjük nem számít)?*”, akkor ez a probléma feladható akár alsós matematikaórán is, hiszen megoldható felsorolással, de érdekes átgondolni kombinációk számának meghatározásával is, ugyanaz a végeredmény adódik mindkét módszerrel. Vagy gondoljunk a következő példára:

– Hányféleképpen lehet az ábráról leolvasni a TANÍTÓNŐ szót, ha csak jobbra és lefelé léphetsz?

T A N Í T Ó
A N Í T Ó N
N Í T Ó N Ő

Ilyen típusú példák is szerepelhetnek alsós matematikai feladatként, hiszen az esetek felsorolhatók, van egy „trükkös” megoldás is (számozással), illetve a feladat megoldható kombinációk számának meghatározásával is – természetesen mindhárom esetben azonos végeredményt kapva. Az ilyen példák jól szemléltetik, hogy többféle szemszögből, többféle módszerrel közelíthetünk meg egy adott problémát, ez segíti a tudás elmélyítését.

A fenti kombinatorikai problémaköröket szisztematikusan, egymás után tárgyaljuk, részletekbe menően, megfelelő alapot képezve. A félév során azonban adódik olyan alkalom is, amikor a hallgatóknak olyan példákat kell átgondolniuk, amelyek esetén előre nem közöljük, melyik résztémába tartozik az adott probléma, hanem nekik kell rájönniük erre, vagy legalábbis meg kell tudniuk oldani azokat. Ez többnyire izgalmas és nem egyszerű feladat számukra.

A kombinatorikai témakörök után a valószínűség alapjaival foglalkozunk. Itt számos olyan fogalom megértésére van szükség, mint pl. valószínűségi kísérlet, elemi esemény, eseménytér, esemény, gyakoriság, valószínűség, amelyek nem egyszerű konstrukciók, sokszor absztraktak. Ennek elősegítésére, a szükséges definíciók mellett, sok példát mutatunk, amelyek gyakorlati tartalommal egészítik ki az említett fogalmakat. Többféle kísérlettel kapcsolatban válaszolunk meg kérdéseket, ezek között említhetjük pl. a kockadobást, a pénzérmefeldobást, a kártyahúzást. A problémák megoldása során sokszor szükség van kombinatorikai megfontolásra, akár már akkor is, amikor valószínűségről még nem is beszélünk, például:

- *Tekintsük a következő kísérletet: Feldobunk három különböző pénzérmét, és mindegyik érménél figyeljük, hogy fejet vagy írást dobtunk. Adj meg egy lehetetlen; egy lehetséges, de nem biztos és egy biztos eseményt! Írd fel a következő eseményeket alkotó elemi eseményeket:*

A: Pontosan egy fejet dobtunk.

B: Legalább egy fejet dobtunk.

Azon problémák, amelyekben a valószínűség is megjelenik, két fő típusba sorolhatók. Az egyik fő típus, amikor a „klasszikus” módszerrel kiszámítható a keresett valószínűség. Ilyenkor a kombinatorika nagyon hangsúlyos, mivel mind a „megfelelő”, mind az összes eset számának meghatározása tulajdonképpen egy-egy kombinatorikai részfeladatnak tekinthető. Elegendő a következő példára gondolnunk:

- *„Egy dobozban 7 db golyó van, melyek 1-től 7-ig számozottak. Visszatevés nélkül sorban kihúztuk mind a 7 golyót. Mennyi a valószínűsége, hogy a páratlan számokat húztuk ki először?”*

A másik fő típusba a geometriai módszerrel megoldható valószínűségi feladatokat soroljuk. Ilyen példákat is megoldunk az órákon, ezekben a kombinatorika nem vagy alig jelenik meg, itt természetesen a geometriai ismeretek megléte fontos. A félévet néhány valószínűségi paradoxon bemutatásával zárjuk.

Összegzés

A halmazok, a logika és a kombinatorika témakörökkel a hallgatók az egyetemen részletesen megismerkednek. Szem előtt tartjuk a 2020-as NAT-hoz illeszkedő tartalmi szabályozókat és azt, hogy a tanító szakosok megismerkedjenek a szükséges alapokkal, és képesek legyenek azokat használni, ami későbbi munkájuk során elengedhetetlen. Mindazonáltal ahhoz, hogy magabiztos pedagógusok lehessenek, valamint tehetséggondozásban is részt tudjanak venni, szükséges mélyebben ismerniük az adott témákat, mint az a korosztály, amelyiknek az óráit tartják majd a jövőben. A fent bemutatott *A matematika alapjai* kurzus ehhez megfelelően hozzájárul, amit kiegészít több matematikai és egyéb tartalmú tárgy is.

Irodalom

Árki Tamás, Konfárné Nagy Katalin, Kovács István, Trembeczki Csaba és Urbán János (2009): *Sokszínű matematika – feladatgyűjtemény 9, 10, 11, 12.* Mozaik Kiadó, Szeged.

Csordás Mihály, Konfár László, Pintér Klára, Vincze Istvánné, Kozmáné Jakab Ágnes és Kothencz Jánosné (2008): *Sokszínű matematika – tankönyv 5, 6, 7, 8.* Mozaik Kiadó, Szeged.

Kerettanterv az általános iskola 1–4. évfolyama számára – Matematika 1–4. évfolyam. https://www.oktatas.hu/pub_bin/dload/kozoktatas/kerettanterv/Matematika_A.docx (2021. augusztus 18.)

Kerettanterv az általános iskola 5–8. évfolyama számára – Matematika 5–8. évfolyam. https://www.oktatas.hu/pub_bin/dload/kozoktatas/kerettanterv/Matematika_F.docx (2021. augusztus 18.)

Kórus Péter (2020): A kombinatorika módszertanáról a tanító- és óvodapedagógus-képzésben. In: Makkos Anikó, Fehér Ágota és Pongrácz Attila (szerk.): *Okos lét, innováció és digitalizáció – irányok, trendek és következmények. A XXIII. Apáczai-napok Tudományos Konferencia tanulmánykötete*. Széchenyi István Egyetem Apáczai Csere János Kar, Győr, 273–279.

Kórus Péter (2017): Matematika gyakorlatok elsőéves tanítóképzős hallgatóknak. In: Lőrincz I. (szerk.): *XX. Apáczai-napok Nemzetközi Tudományos Konferencia – Tanulmánykötet.* Széchenyi István Egyetem Apáczai Csere János Kar, Győr, 264–268.

Kosztolányi József, Kovács István, Pintér Klára, Urbán János és Vincze István (2009): *Sokszínű matematika – gimnáziumi tankönyv 9, 10, 11, 12*. Mozaik Kiadó, Szeged.

Pappné Dr. Ádám Györgyi (2004, szerk.): *Matematika az általános képzéshez a tanító szak számára.* Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest.

Szalay István (2010): *Matematika tanító szakos hallgatók számára.* Szegedi Egyetemi Kiadó Juhász Gyula Felsőoktatási Kiadó, Szeged.

Szendrei Ágnes (2006): *Diszkrét matematika.* Szegedi Egyetemi Kiadó, Polygon, Szeged.

Szendrei János, Tóth Balázs (1996): *Bevezetés a matematikai logikába.* Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest.

Vármonostory Endre (2007): *Bevezetés a matematikába.* Szegedi Egyetemi Kiadó, Polygon, Szeged.