Szöveges feladatok tanításának új módszerei

Pintér Klára
pinter.klara@szte.hu
SZTE JGYPK Alkalmazott Pedagógiai Intézet

A szöveges feladatok megoldása minden szinten sok nehézséget okoz a tanulóknak, ezért a matematikatanítás egyik fontos kérdése, hogyan érhetjük el, hogy a tanulók sikeresek legyenek ebben a témában is. A szöveges feladatok tanításával fejlődik a tanulók problémamegoldó képessége, szövegértése, összefüggéslátása, következtetési képessége, számolási és becslési készsége. A szöveges feladatok kapcsolatot jelentenek a matematika és a hétköznapi élet, sőt gyakran más tantárgyak között is. Ezért lényeges, hogy a matematikát tanítók fel tudják építeni a szöveges feladatok tanításának lépéseit, tudjanak maguk is feladatokat válogatni, különböző témákban feladatokat alkotni, és ismerjenek olyan módszereket, amelyek alkalmazásával a gyerekek szövegesfeladat-megoldó képessége fejlődhet. Ehhez igyekszünk segítséget nyújtani ebben az írásban.

Kulcsszavak: *szöveges feladat, problémamegoldás, szövegértés*

✳

1. A szöveges feladatok

A szöveges feladatok az iskolai matematika tananyag sokat vizsgált részét képezik, és bár a magyarországi tanulók megoldási teljesítménye az 1970-es évekhez képest valamelyest javult, ezek a feladatok azóta is sok gondot okoznak a gyerekeknek (*Vidákovich* és *Csapó*, 1996; *Csíkos*, 2003; *PISA*, 2019).

A szöveges feladatok olyan, hétköznapi környezetbe ágyazott matematikai problémák, amelyek megoldása egy vagy több matematikai műveletet igényel. A szöveges feladatok megoldása során a konkrét szöveg alapján absztrakt matematikai modellt állítunk fel, majd ebben megoldjuk a feladatot, az eredményt pedig visszafordítjuk a konkrét szituációba (*Ahmad*, 2010; *C. Neményi, R. Szendrei*, 1997; *Verschaffel* és *mtsai*, 2010). A szöveg és a matematikai modell közötti átmenet mindkét irányban nehézséget okoz (*Ben Zeev*, 1998; *Haghverdi*, 2012), ezért fontos ezt a folyamatot vizsgálni, elemeit, lépéseit, fokozatait részletesen tanulmányozni.

1.1. Képességkomponensek

A szöveges feladatok megoldási eredményessége összefügg a szövegértési képességgel (*Varga*, 2016), és sikeresebb, ha a problémát a megoldó számára ismerős szituációba illesztik. A szöveges feladatok eredményes megoldásához a számolási készség és a szövegértés egyaránt szükséges: az egyszerűbb feladatoknál a számolási készség dominál, azonban a nehezebb feladatoknál egyformán teljesítenek a gyengébb szövegértésű, de jól számoló gyerekek és a jó szövegértésű, de gyengébben számoló gyerekek (*Pongsakdi*, 2020). Összefüggést találtak a szöveges feladatok megoldási sikeressége és a munkamemória kapacitása között (*Fuchs*, 2020). Célszerű kétirányú fejlesztést ötvözni, egyrészt a munkamemória kapacitásának növelését, másrészt olyan módszerek tanítását, amelyek segítik a munkamemória alacsonyabb kapacitásának kompenzálását például a szövegek részleteinek lejegyzésével. A munkamemória kapacitása összefügg a szövegértéssel is, hiszen egy regény több szálon futó cselekményét is csak úgy lehet követni, ha emlékszünk a korábbi eseményekre.

1.2. Szöveges feladatok megoldásának problémái

Kintsch és Greeno (1985) az alapműveletek különböző megfogalmazásai alapján memorizálandó feladattípusokat határoztak meg, így a szöveges feladatok megoldásának menetét lépések egymásutánjaként írták le, amelyek során a meghatározott feladattípusokból a megoldónak kulcsszófordítás alapján kell választania, figyelmen kívül hagyva a tartalomból fakadó összefüggéseket.

1. példa: Dóri meghívókat rendelt a ballagására. Szombaton átadta a meghívók harmadát, így vasárnapra már csak 14 meghívó maradt. Hány meghívót rendelt Dóri?

A tanulók kiemelik a harmada szót és a feladatban szereplő egyetlen számot, a 14-et, ez alapján a $3 \cdot 14 = 52$ megoldást adják. Nem veszik figyelembe a szöveg többi részét, amelyből kiderül, hogy a 14 meghívó – a feltételezettel ellentétben – az összesnek nem az 1/3, hanem a 2/3 része. A hiba elkerülhető lenne, ha rajzzal szemléltetnék az összes meghívót, és az ábrán jelölnék a szombaton és vasárnap átadott meghívók számát.

Hegarty, Mayer és Monk (*Hegarty* és *mtsai*, 1995) a problémamegoldás modelljét alkalmazta a szövegesfeladat-megoldásra, így a feladat matematikai modellje a szöveg többszöri elolvasása, többszörös visszacsatolás során születik meg. A szövegnek megfelelő matematikai modell megalkotásának nehézségeit mutatja a következő példa.

2. példa: Hányszorosára változik az 1 élhosszúságú kocka térfogata, ha minden élét kétszeresére növeljük?

Egy tanító hallgatók körében végzett felmérés során a következő rossz válaszok születtek:

2-szeresére. Ennek oka annak helytelen feltételezése, hogy a kocka élének hossza és a térfogata között egyenes arányosság van.

7-szeresére, mert 7-tel több kis kocka lesz. Itt már a toldalékok figyelmen kívül hagyása okozza a hibát. Bár a válaszoló feltételezhetően helyesen állapítja meg, hogy a kapott kocka 8 darab kiskockából áll, így a kiskockák száma 7-tel nőtt. A feladatot helyesen értelmezte, jól is számolt, csak a kapott eredménynek az eredeti szövegbe visszafordításánál követte el a hibát, hogy a „7-szeresére" és a „7-tel több" kifejezéseket összekeverte.

27-szeresére, mert a 2-vel nagyobb élű kocka 27 kis kockából áll. Ez az előzőhöz hasonló hiba, csak a megoldó most nem a válasz megfogalmazása, hanem a szöveg értelmezése során követte el, hiszen az él hosszának 2-szerese helyett a 2-vel nagyobb értékkel számolt.

Már egy szó, egy toldalék is teljesen meg tudja változtatni a szöveg értelmét: a 2-vel több, a 2-szerese és a 2-szeresével több, mind mást jelent. Nem segíti a tanulók számára a szorzás és az összeadás szétválasztását, hogy egyre gyakrabban fordul elő a köznyelvben a „2-szer több" kifejezés, amelyben a toldalék szorzásra, a „több" szó pedig összeadásra utal, mégis szorzás értelemben szokták használni. Matematikailag azért is helytelen a 2-szer több kifejezés, mert negatív számok esetén a kétszerezéssel nem növeljük a számot.

A matematikaoktatás egyik fő feladata a tanulók felkészítése valóságközeli, gyakorlatorientált problémák megoldására. A megfigyelések szerint a tanulók a matematikaórákon nem a „józan ész", a valóságos tapasztalatok alapján oldják meg a szöveges feladatokat (*Csíkos*, 2003).

3. példa: Egy teli gyümölcsös láda tömege hatszorosa az üres láda tömegének. A teli láda 30 kg-mal nehezebb az üres ládánál. Hány kilogramm gyümölcs van a ládában? Mennyi az üres láda tömege?

Tanító hallgatók körében végzett felmérés során alig akadt olyan hallgató, aki felismerte volna, hogy a teli láda éppen a gyümölcs tömegével nehezebb az üres ládánál, így nem írták le azonnal, hogy a gyümölcs tömege 30 kg. Még azok közül is, akik szakaszos ábrázolással próbálkoztak, többen az üres ládának megfelelő szakasz után rajzolták a teli ládának megfelelő szakaszokat, majd tévedésből a teli ládához rajzolták a 30-at, így a 30-at 6-tal osztották. Többen a kulcsszófordításnak megfelelően osztották 6-tal a 30 kg-ot. Érdemes volt elgondolkodni azon is, hogy vajon milyen gyümölcs lehet az, amiből 30 kg-ot lehet rakni egy ládába.

A modellalkotás, az absztrakció csak fokozatosan valósulhat meg, ennek siettetése, lépcsőfokok kihagyása olyan kudarcokat eredményez, amelyek után a tanulók már idegenkednek a szöveges feladatoktól, ami tovább rontja a megoldás sikerességét. A szöveges feladatok megoldását a problémamegoldás lépéseinek megfelelően tanítjuk, a probléma megértése után a tervkészítés, majd annak végrehajtása, végül az ellenőrzés és válaszadás következik. A korábbi tankönyvek többsége a tervkészítés fázisában nyitott mondatot, gyakorlatilag egyenleteket íratott fel már az alsó tagozatos gyerekekkel is. Bár ezekben a nyitott mondatokban az ismeretlent általában betűk helyett formákkal jelölték, a megoldásuk semmivel sem volt egyszerűbb, mint az egyenleteké, így az alsó tagozatos gyerekek csak próbálgatással tudtak hozzáfogni, ami nem fejlesztette a következtetést, ritkán vezetett teljes megoldásra, folytonosan változó mennyiségek esetén pedig teljesen hibás megközelítést jelentett. A 2020-as NAT szerint a szöveges feladatokhoz egészen 7. osztályig nem írunk fel nyitott mondatokat, a nehezebb problémákat visszafelé következtetéssel, szakaszos ábrázolással oldjuk meg. A Mozaik Kiadó sokszínű Matematika 6. osztályos tankönyvének egy fejezete (*Csordás*, *Konfár*, *Kothenczné*, *Kozmáné*, *Pintér* és *Vinczéné*, 2011) végigvezeti a tanulókat egy-egy leckével a szöveges feladatok megoldásának lépésein: olvasd el a feladatot, gyűjtsd ki az adatokat; mi a kérdés; következtetés; ellenőrzés; válasz. Bemutatja a következtetési módszereket, képi megoldásokat, amelyek jól összefoglalják az alsó tagozatos tapasztalatokat, és előkészítik a 7. osztálytól kezdődő egyenletmegoldást, ezzel biztosítva az absztrakció fokozatosságát.

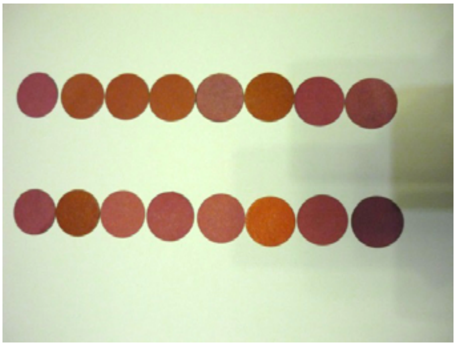
1.3. Szöveges feladatok különböző reprezentációi

Az ismeretszerzés folyamatában lényeges az új ismeretek materiális, képi és szimbolikus síkjának végigjárása (*Bruner*, 1966). A különböző reprezentációk segítik a problémamegoldást, a problémák materiális síkon való megtapasztalása, vizualizációja megalapozza az absztrakciót, és kreatív megoldásokat inspirálhat (*Vásárhelyi* és *Ambrus*, 2007; *Arcavi*, 2003). Paivio és Begg (1981) kimutatta, hogy az agyban elkülönül az információ képi – konkrét és verbális – absztrakt kódolása. Ha egy információ mindkét módon kódolva van, akkor az növeli az információhoz való hozzáférés esélyét. Csíkos, Szitányi és Kelemen szöveges feladatok külső és belső reprezentációinak kölcsönhatását vizsgálták 3. osztályos tanulók körében 20 órás tanítási ciklus hatására. A fejlesztő tanítási ciklus eredményes volt, hiszen a külső rajzos reprezentáció és a belső reprezentációk kialakult kapcsolatait tudatosította a tanulókban (*Csíkos*, *Szitányi* és *Kelemen*, 2010).

A következő példák azt mutatják, hogy milyen tárgyi tevékenységekkel alapozhatjuk meg a vizuális modellek megalkotását.

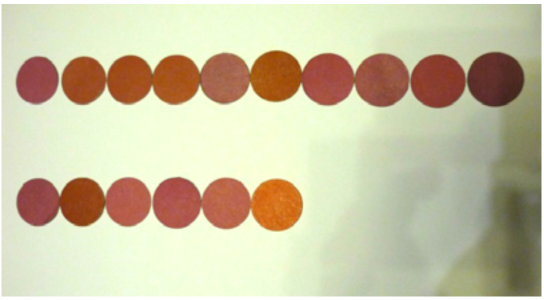
4. példa: Kati és Peti együtt 16 szem epret evett. Kati 4-gyel többet evett meg, mint Peti. Hány szem epret evett meg Kati?

Szemléltessük az epreket korongokkal!



1. ábra: Korongokkal két egyenlő részre osztás

A tanulók egy rész úgy indul el, hogy két egyenlő darabszámú kupacra osztják az epreket, majd ez egyikből átraknak valamennyit, hogy a szükséges különbség meglegyen. Tipikus hiba akár gyerekek, akár tanító hallgatók oldják meg a feladatot, hogy először 4 epret raknak át a 4 különbség eléréséhez. A materiális síkon végzett tevékenység óriási előnye, hogy saját maguk azonnal megtapasztalják, hogy hibáztak, és ki tudják javítani. Ezzel lassan felfedezik a szabályosságot, és megfogalmazzák, hogy adott különbséget egyenlő mennyiségekből a különbség felének átrakásával lehet elérni. Így a gyerekek ehhez a tudáshoz nem a tanár által, hanem saját tapasztalataik alapján jutnak el.



2. ábra: Korongokkal a megfelelő szétosztás

Fontos része a fejlesztésnek, hogy ne mindig ugyanaz legyen a szövegek modellje. A következő feladat az előző nehezítése, hiszen nincs megadva az összes lap száma, így ez nem rakható ki egyszerűen:

5. példa: Dorka és Kata egy kupac írólapot szeretne egymás közt egyformán elosztani. Amikor megszámolták a lapokat, kiderült, hogy Dorkának 28-cal több van, mint Katának. Amikor viszont néhány lapot átadott Katának, Dorkának lett 4-gyel kevesebb lapja.

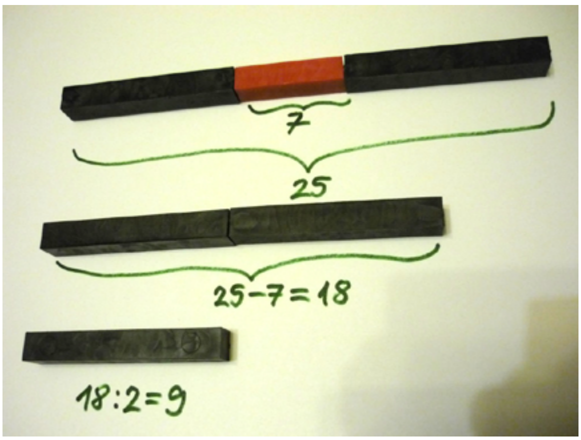
Meg lehet-e mondani, hogy hány lapot adott át Dorka Katának, és hogy hány lap volt összesen?

Alkalmazhatjuk az előző tudásunkat: ahhoz, hogy ugyanannyi lapjuk legyen, 28: 2 = 14 lapot kell átadnia. Ha Dorka még egyet átad Katának, már 2-vel kevesebb lapja lesz, mint Katának. Így ahhoz, hogy 4-gyel kevesebb lapja legyen, a 14-en kívül még 2 lapot, azaz összesen 16 lapot kell átadnia. Azt viszont nem tudhatjuk, hány lap volt összesen, éppen ez a feladat nehézsége.

6. példa: Kata és Vera egy Zrínyi-feladatsor 25 feladatát oldják meg együtt úgy, hogy Kata az elején kezdi, Vera pedig a végén, és sorban mindegyik feladatot megoldja valamelyikük. Ki hány feladatot oldott meg, ha Kata 7-tel több feladatot oldott meg, mint Vera?

Itt kellő türelemmel kirakhatjuk a 25 feladatnak megfelelő 25 korongot, ám ezt a feladatok, korongok elfelezése nélkül nem tudjuk két egyenlő részre osztani (ha a megoldás közben a fél korongot, fél feladatot is megengedjük, akkor a megoldás ugyanúgy működik).

A probléma megértésének első lépéseként beszéljük meg, hogy ki oldott meg kevesebb feladatot. Alkalmazzuk a színes rudakat! A gyerekek jobban átérzik, hogy a választott rúd hossza lényegtelen, ha azt a rudat választhatják, amelyiknek a színe a legjobban tetszik nekik. Válasszunk egy rudat, amely a Vera által megoldott feladatokat jelenti, és egy másikat, amely azt mutatja, Kata mennyivel oldott meg többet. Erre kis papírral rá is ragaszthatjuk a konkrét értékét, ami most a 7. A megoldás menete az ábrán látható. Elvesszük a többletet, azaz azt a rudat, amely 7 feladatot jelent, így két egyforma hosszú rúd marad, amelyek együtt 25 – 7 = 18 feladatot érnek, tehát egy rúd 18 : 2 = 9-et ér. Ez Vera feladatainak száma. Ellenőrzés után válaszolunk a kérdésre.



3. ábra: Megoldás színes rudakkal

A tapasztalatok azt mutatták, hogy az eszközhasználat célravezető, a színes rudakkal kirakást természetesen követi a rudak lerajzolása, azaz a feladat szakaszos modelljének megalkotása.

A szöveges feladatok különböző reprezentációinak alkalmazását tanítani kell, érdemes felépíteni olyan feladatsorozatokat, amelyek egyre nehezedő, változatos problémákkal segítik a tanulókat az absztrakció fokozatos fejlődésében.

2. A szöveges feladatok „építménye"

A szöveges feladatok „építménye" segítséget nyújt a pedagógusoknak abban, hogy változatos szöveges feladatokat, feladatsorozatokat állítsanak össze a tanítványaik számára, amelyek felkészítik őket a különböző nehézségek leküzdésére.

Az „építmény" háromdimenziós.

Az egyik dimenziót a szintek jelentik, amelyek közül az 1. szint az aritmetikai szöveges feladatok szintje, amikor a szöveges feladat megoldása egy matematikai művelet, esetleg több lépéses feladat esetén több művelet. A további két szinten algebrai szöveges feladatok találhatók, amelyek megoldásához már következtetési módszerekre, 7. osztálytól egyenletekre van szükség. Ezek azért bomlanak két szintre, mert így fokozatosan alkalmazható a szakaszos modell, ami lehetővé teszi a következtetéses megoldást. A kutatások többsége az 1. szinten levő szöveges feladatokkal foglalkozik, ám az absztrakció fokozatossága miatt lényeges a következő két szint végigjárása is, amivel előkészíthető a szöveges feladatok egyenletekkel való felírása és megoldása (*Michael*, 2005).

A 2. szinten levő feladatokban szereplő mennyiségek egy mennyiség többszöröseivel kifejezhetők, például:

7. példa: Gellért háromszor annyi kosarat dobott az edzésen, mint Ákos. Ketten együtt 24 kosarat dobtak, hányat dobtak külön-külön?

A 3. szinten ehhez hozzájönnek olyan számokkal kifejezett „többletek", mint a 4–6. példában.

Minden szinten két dimenzió szerint változnak a csoportosítás szempontjai, amelyeket az alábbiakban táblázatokban ábrázolunk. Az egyik dimenzió a matematikai fogalmak, struktúrák, a másik dimenzió a nyelvi nehézségek (*Pongsakdi*, 2020).

A matematikai jellemzők alapján a következő típusok lehetnek (*Carpenter* és *mtsai,* 1988; *Powell* és *Fuchs*, 2018):

- Műveletek
  - – Változtatás (összeadás, kivonás, szorzás, osztás)
  - – Hasonlítás (+; -; x ; /)
  - – Egyenlővé tevés (+; - ; x ; /)
  - – Egyesítés (összeadás, kivonás)

- Matematikai struktúra mindegyik műveleten belül:

  A + B = ☐; A + ☐ = C; ☐ + B = C

Fontos a struktúrák variálása is, a következő példa éppen egy olyan hasonlítás, amelyben a harmadik matematikai struktúra, azaz fordított szöveg szerepel, ami sokszor nehézséget okoz a gyerekeknek.

8. példa: Villő 11 éves, 8 évvel idősebb Bercinél. Hány éves Berci?

A megoldás a kulcsszó fordítás alapján 11+8=19 lenne, azonban a fordított szöveg miatt 11 – 8 = 3 év a helyes válasz Berci életkorára.

Az 1., azaz az aritmetikai szöveges feladatok szintjén a fő cél a szövegnek megfelelő művelet megtalálása, így itt a fenti szempontok alapján csoportosítunk. A további szinteken a matematikai struktúrák tovább bővülnek, megtartva a műveletekre vonatkozó, 1. szinten levő csoportosítást. Ott azonban már csak az új szempontokat jelöljük a táblázatban.

Minden szinten a nyelvi nehézségek jelentik a második dimenziót (*Daroczy* és *mtsai*, 2015):

- Szövegkörnyezet nélkül.
- Egyszerű szöveg.
- Nehezített szöveg:
  - – szöveg hossza (túl hosszú, túl rövid).
  - – szókincs.
  - – az információk sorrendje, a kérdés helye.
  - – felesleges információk.
  - – több idősík.
  - – feltételes változások.

Már a szövegkörnyezet nélküli feladatok is okozhatnak nehézséget, például nem ugyanazt jelenti a „*melyik szám a 36 harmada*”, és „*melyik szám harmada a 36*” kérdés, bár a két szöveg csak a szavak sorrendjében tér el. Az egyszerű szituációk sokszor még könnyebbé tehetik a megoldást, hiszen ezek lejátszhatók, könnyebben elképzelhetők, ezáltal a megoldás is adódik.

A három dimenzión kívül is vannak olyan szempontok, amelyeket érdemes figyelembe venni a feladatok sorba rakásakor. Minden cellában lehet egy- vagy többlépéses feladat, ahol a lépések számának növekedése komoly nehezítést jelent a tanulók számára. Egyszerűbb feladatok esetén is dönteni kell, hogy melyik lépéshez melyik műveletre van szükség, nehezebb feladatok esetén pedig már a lépések megfogalmazása is olyan feladatalkotási probléma, ami sok gyereknek nehézséget okoz.

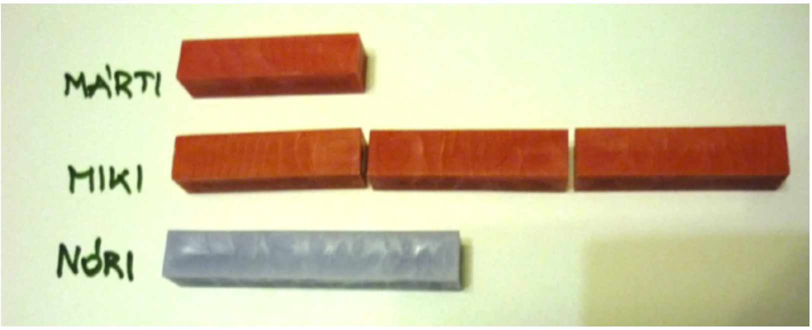
Ugyancsak minden cellában figyelni kell a feladatban szereplő számok, mennyiségek nagyságára. Ugyanis legfeljebb kétjegyű számokkal könnyebben dolgoznak a gyerekek, mint többjegyű számokkal, majd törtekkel, tizedes törtekkel. Sikeresebb a feladatmegoldás, ha nem kell közben mértékegységet váltani. Ezek oka, hogy sokszor a nagyobb számokkal, törtekkel végzett műveletek, a mértékegységváltás még nem automatizálódott, ezért olyan többletfigyelmet kíván, ami a megoldást igénylő következtetés mellett már nagy nehézséget jelent a gyerekeknek. Ezért is fontos a műveletvégzés, mértékegységváltás minél automatikusabbá tétele, valamint a többcsatornás figyelem fejlesztése.

1. táblázat: 1. szint: Aritmetikai szöveges feladatok

1.szint Aritmetikai szöveges feladatok	Kontextus nélkül	Egyszerű szituáció	Szövegbeli nehézségek (hosszúság: túl rövid, túl hosszú, felesleges adatok, szokatlan kifejezések, időbeli változás, feltételes változás)
Változtatás - összeadás - kivonás - szorzás - osztás			
Hasonlítás - összeadás - kivonás - szorzás - osztás			
Egyenlővé tevés - összeadás - kivonás - szorzás - osztás			
Egyéb Egyesítés - összeadás - kivonás Bennfoglalás			
További szempontok	Mindegyik cellán belül megkülönböztetjük a következőket: egylépéses–többlépéses adatok szerinti nehézség: egyjegyű–többjegyű számok, törtek, mértékegységek		

A 2. szinten azok a feladatok találhatók, amelyekben szereplő mennyiségek egy mennyiség többszöröseivel kifejezhetők. Ennek is vannak fokozatai. A többszörösök egyszerű kifejezésén kívül lehetnek törtrészek, arányok, amelyek értelmezése nehezebb. Ahhoz, hogy minden mennyiség egyazon mennyiség többszöröseivel kifejezhető legyen, előfordul, hogy új mennyiséget kell bevezetni, ami az ábrázolásban új osztópontok berajzolását jelenti. Ezt mutatja a következő példa:

9. *példa: Testnevelésórán a gyerekek kosárlabdáztak. Miki háromszor annyi pontot dobott, mint Márti. Nóri feleannyit dobott, mint Miki. Hárman együtt 44 pontot dobtak. Ki hány pontot dobott?*



4. ábra: Az összefüggések kirakása színes rudakkal

Márti és Miki pontjainak számát könnyen tudtuk ábrázolni, ám ahhoz, hogy Nóri pontjait is kirakjuk, új rúdra van szükség. Ennek a hossza is összefügg az előzőkkel, amit úgy tudunk kirakni, ha az eredeti egység felét választjuk egységnek:

5. ábra: Új egység bevezetése színes rudakkal

Ez abból is látható, hogy ha Miki pontjainak felét és harmadát is ábrázolni kell, akkor a hatodát kell bejelölni, vagyis ez lesz a megfelelő egység, aminek többszöröseként mindegyik mennyiség kirakható.

2. táblázat: 2. szint: Arányosságos szöveges feladatok

2. szint Arányosságos szöveges feladatok	Kontextus nélkül	Egyszerű szituáció	Szövegbeli nehézségek (hosszúság: túl rövid, túl hosszú, felesleges adatok, szokatlan kifejezések, időbeli változás, feltételes változás)
Többszörös			
Törtrész			
Arány			
Közös többszörös (új osztópontok)			
Egyéb			
További szempontok	Mindegyik cellán belül megkülönböztetjük a következőket: egylépéses–többlépéses adatok szerinti nehézség: egyjegyű–többjegyű számok, törtek, mértékegységek		

A 3. szinten ezekhez a matematikai struktúrákhoz hozzájönnek a „többletek", amelyeket a többszörösökkel kombinálunk.

3. táblázat: 3. szint: „Többletes" szöveges feladatok

3. szint „Többletes" szöveges feladatok	Kontextus nélkül	Egyszerű szituáció	Szövegbeli nehézségek (hosszúság: túl rövid, túl hosszú, felesleges adatok, szokatlan kifejezések, időbeli változás, feltételes változás)
Többlet			
Többlet és többszörös			
Egyéb			
További szempontok	Mindegyik cellán belül megkülönböztetjük a következőket: egylépéses–többlépéses adatok szerinti nehézség: egyjegyű–többjegyű számok, törtek, mértékegységek		

A szöveges feladatok „építményében" először a csoportosítás szempontjaival ismerkednek meg a pedagógusok, majd ez alapján adott feladatokat sorolnak be a megfelelő cellákba. A továbbképzések, egyetemi módszertanórák keretében végzett kísérletek során a résztvevők csoportban dolgoztak, így közösen döntöttek a feladatok besorolásáról. A legnagyobb nehézséget az jelentette, hogy a feladatok nagy száma (30 feladat), valamint a 2. és 3. szinten levő feladatok viszonylagos nehézsége miatt nem oldották meg végig az összes feladatot, így csak az első benyomás alapján döntöttek. Így kerülhetett a 2., néha a 3. szintre a következő feladat:

10. példa: Villő, Guszti, Berci és Gili nagymamánál nyaraltak. Villő és Guszti 2 nappal hamarabb érkezett, mint Berci és Gili, akik egy hétig maradtak. Minden gyerek nagyon szereti a málnát, ezért minden délután leszedték az addigra megérett málnát, megmosták, és vanília fagyival mindet megették. Szerdán Guszti 54 szemet szedett, Villő 16 szemmel többet. Csütörtökön Guszti 9-cel többet szedett, mint szerdán, Villő pedig 2-vel kevesebbet. Hány szem málnát szedett Villő szerdán?

A sok felesleges információ miatt nehéz észrevenni, hogy a megoldáshoz mindössze arra van szükség, hogy szerdán Guszti 54 szemet szedett, Villő 16 szemmel többet, így az 54+16=60 összeadással megkaphatjuk a választ arra a kérdésre, hogy hány szem málnát szedett Villő szerdán. A feladat 1. szinten levő hasonlítás, melynek struktúrája A+B=□. Nyelvileg a szöveg – hosszúsága és a felesleges információk miatt – a 3. oszlopba tartozik.

A következő lépés a pedagógusok és a hallgatók számára önálló feladatsor alkotása volt, amelyben a feladatok tudatosan egyre nehezednek az „építményben" szereplő tulajdonságok alapján. A következő feladatsort 6. osztályos tanulók számára alkotta egy tanárjelölt a szöveges feladatok „építménye" alapján:

1. Három gyerek együtt 20 éves. Hány évesek lesznek együtt 3 év múlva?
2. Melyik az a szám, amelynek hétszerese 42-vel több a négyszeresénél?
3. Mókus Márton a születésnapján ezt mondja: „Ha még ötször annyi ideig élek, mint amennyit eddig éltem, akkor éppen 60 éves leszek." Hány éves most Mókus Márton?
4. Anna, Dorka és Zoli almát szedtek. Dorka 10-zel többet szedett, mint Anna. Zoli kétszer annyit szedett, mint Anna és Dorka együtt. Hány almát szedtek külön-külön, ha hárman összesen 120 almát szedtek?

A tapasztalatok azt mutatják, hogy a szöveges feladatok „építménye" rugalmasan, jól használható a feladatsorozatok alkotására. Felmerültek további szempontok is. Nehézséget jelenthet például, ha a lehetséges megoldások száma nem egy, hanem több, esetleg nincs is megoldás. A típusok sokfélesége miatt reménytelen vállalkozás az összes típus megtanítása, begyakoroltatása, ehelyett olyan feladatmegoldási módszereket kell tanítani, amelyek nem csak az itt megjelenő típusokra, hanem váratlan, új helyzetekben is alkalmazhatók.

3. Tanítási módszerek

A következőkben olyan tanítási módszereket, munkaformákat írunk le, amelyek segítik a tanulók szövegesfeladat-megoldási képességének fejlesztését.

3.1. A mentális modellek kialakításának támogatása

A szöveges feladatok megoldása során a mentális modellek kialakítást segítik a következők (*Thevenot* és *Barouillet*, 2015):

- a szituáció lejátszása, a tárgyi tevékenység;
- a feladat újrafogalmazása;

- rajzok, ábrák készítése, vizuális szemléltetés.

A különböző matematikai műveletek, struktúrák tanítása során mindig törekedjünk a fogalmak széles tapasztalaton nyugvó megértetésére, semmiképpen sem csak a műveletek algoritmusának memorizálására. A tanulók ne az alkalmazandó műveletet próbálják utasításokból, kulcsszavakból kitalálni, ehelyett a szövegesfeladat-megoldás lépésein menjenek végig tudatosan. Ez alapján tegyenek fel maguknak kérdéseket, amelyekre adott válaszok továbbviszik őket a megoldásban (*Powell* és *Fuchs*, 2018).

3.2. Kooperatív munkaformák alkalmazása a szöveges feladatok megoldására

A szöveges feladatok megértését is segíti a kooperatív munkaformák rendszeres alkalmazása, amelynek során a tanulók lényegesen többet kommunikálnak, ezáltal fejlődik kifejezőkészségük, szövegértésük. Ez a fejlesztés akkor is hat a szöveges feladatok megoldására, ha a kooperatív munkaformát más témában alkalmazzuk. A szöveges feladatok megoldását megszervezhetjük kooperatív módon úgy, hogy a csoport minden tagja kap egy lapot, amelyen egy feladatot talál. Mindenki elolvassa a feladatot, és kiírja az adatokat, elkészíti a feladat vázlatát. Ezután továbbadja a lapot a csoport következő tagjának, aki szintén elolvassa a feladatot, leellenőrzi a csoport előző tagjának munkáját, ha szükséges, megbeszélik, közösen kiegészítik, módosítják. Ezután a szöveg alapján ábrát készít, majd továbbadja a lapot. A csoport következő tagja a következő lépésben az előzőek átnézése után felírja és elvégzi a műveletet. Az utolsó lépés az eredmény ellenőrzése a szövegbe való helyettesítéssel, a kérdés újraolvasása és a válaszadás. Ha négynél több tagja van a csoportnak, akkor az ellenőrzés és a válaszadás szétbontható. Így elérhetjük, hogy a csoport minden tagja minden feladatot lát, közben tudatosulnak a megoldás lépései, amelyek során folyamatosan ellenőrzik egymás munkáját, és meg tudják beszélni, ha nem értenek egyet, tudnak érvelni, indokolni, magyarázni.

3.3. Feladatalkotás gyakorlása

A szöveges feladatok megoldását segíti a szöveges feladatok alkotásának gyakorlása (*Chen*, 2007). A feladatküldés során a tanulók csoportokban dolgoznak, adott műveletsorra vagy adott szakaszos ábrára kell szöveges feladatot alkotniuk, amit leírnak és átadnak a következő csoportnak, akik megoldják és visszaadják azt ellenőrzésre a feladat íróinak. Tapasztalat szerint az első néhány ilyen feladat alkalmával iskolás feladatokat írnak a tanulók, később ráéreznek arra, hogy kreatívan olyan szövegeket írhatnak, amelyek őket érdeklő témákról szólnak. Jobban tudatosul, hogy elképzeljék a szituációt, és az adatokhoz írt szöveg reális legyen.

11. példa: *Alkoss szöveget, amelyben szerepel a 273 dl és a 27 dl!*

Erre egy tanító hallgató azt írta, hogy nagymama 273 dl tejből palacsintatésztát kevert, amihez még hozzáöntött 27 dl tejet. Mennyi tejből készült a palacsinta? A szöveg megbeszélése során elképzeltük, mennyi tej a 300 dl = 30 l tej, mibe fér bele, és ha 2 liter tejet használunk 100 palacsintához, akkor ennyi tejből hány palacsinta lesz, hány embernek elég ez.

A problémaalkotást gyakorolhatjuk hétköznapi témákban, más tantárgyakban is a gyerekekkel, ez fejleszti problémaérzékenységüket, problémamegoldási képességüket.

3.4. Nyílt feladatok

A problémamegoldó képesség fejlesztését segíti, ha törekszünk arra, hogy zárt feladatok helyett nyílt végű problémákat adjunk a tanulóknak. Ekkor nem az a feladat, hogy a pedagógus által kitalált egyetlen megoldást megkeressék a gyerekek, hanem hogy új lehetőségeket kutassanak fel, ami fejleszti a gondolkodás rugalmasságát, a kreativitást, a döntési képességet (*Boaler*, 1998). Ilyen probléma lehet például, hogy színes mozaik lapokból rakjunk ki olyan sokszöget, amelynek negyede sárga.

A következőben azt mutatjuk be, hogy egy zárt feladatból hogyan lehet a feltételek, adatok változtatásával nyílt feladatokat alkotni.

Zárt feladat: *Hány darab 5 forintossal lehet kifizetni 45 forintot?*

- Hagyjuk el az érmére vonatkozó korlátozást: *Hány érmével fizethetünk ki 45 forintot?*

Ekkor konkrét pénzekkel való kirakással összegyűjthetik a gyerekek a lehetőségeket.

- Hagyjuk el a pénzösszegre vonatkozó korlátozást: *Van egy marék 5 forintosom. Hány forintom lehet?*

A gyerekek konkrét tárgyakkal gyakorolhatják a szorzás értelmezését.

- Változtassuk a korlátozást: *5 egyforma érmém van. Hány forintom lehet?*
- Nehezített korlátozás: *A bal kezemben 2 érme van, a jobb kezemben 1 érme, mégis ugyanannyi pénz van a két kezemben. Milyen érmék lehetnek a kezemben?*

A fordított arányosság gyakorlása, a kétszer akkora értékű érméből feleannyi kell, ha ugyanannyit akarunk kifizetni.

- Változó szituáció: *Egy 10 cm hosszú vonalat kirakunk érmékkel. Hány forintunk lehet?*

A tevékenységben szerepet kap a mérés, és érdekes, hogyan lesz a legtöbb vagy a legkevesebb pénzünk.

Összegzés

A szöveges feladatok megoldása végigkíséri az iskolai matematikaoktatást 1. osztálytól az érettségiig. A műveletek, a számolási készség, a szövegértés széleskörű megalapozása, a problémamegoldás, problémaalkotás fejlesztése lényeges eleme a tanításnak. A különböző reprezentációk variálása, az absztrakciónak az életkori sajátosságoknak megfelelő, tudatos fejlesztése segíti a gyerekeket abban, hogy később az egyenletek felírása, a betűk használata se okozzon problémát. Az ennek megfelelő feladatsorozatok alkotásában a szöveges feladatok „építménye" segíti a pedagógusokat. A szövegértés, problémamegoldás, problémaalkotás fejlesztésére célszerű változatos, kooperatív módszereket alkalmazni, és törekedni kell a nyílt problémák kitűzésére. Ez a pedagógusoktól is stabil matematikai alapokon álló kreativitást kíván, ugyanakkor segíti a tanulók problémaérzékenységének, döntési képességének, kreativitásának alakulását is.

Irodalom

Ahmad, A., Tarmizi, R.A., & Nawawi, M. (2010): Visual representations in Mathematical Word Problem Solving Among Form Four Students in Malacca. ICMER 2010, *Procedia Social and Behavioral Science*, **8.** 356–361. www. sciencedirect.com (2017.05.14.)

Ambrus András (2007): *A konkrét és vizuális reprezentációk használatának szükségessége az iskolai matematikaoktatásban.* https://drive.google.com/file/d/0B9KuvIKKTNQTbm5VWUpyS01ORkE/view (2017. május 10.)

Arcavi, A. (2003): The role of visual representation in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics* **52**, 3. sz. 215–241.

Ben Zeev (1998): Amikor a hibás matematikai gondolkodás majdnem olyan, mint a helyes: a racionális hibák. In: Sternberg, R. J. és Ben Zeev, T. (szerk.): *A matematikai gondolkodás természete*. Vince Kiadó, Budapest.

Boaler, J. (1998). Open and Closed Mathematics: Student Experiences and Understandings.

Journal for Research in Mathematics Education, **29**. 1. sz. 41–62.

Bruner, J. S. (1966): *Towards a theory of instruction.* Harvard University Press.

Carpenter, T. P., Moser, J. M. & Bebout, H. C. (1988): Representation of addition and subtraction word problems. *Journal for Research in Mathematics Education,* **19**. 4. sz. 345–357.

Chen, L., Van Dooren, W. & Verschaffel, L. Chen, Q. (2007): The Relationship between Posing and Solving Arithmetic Word Problems among Chinese elementary School Children. *Journal of the Korea society of Mathematical Education Series D. Research in Mathematical Education*, **11**. 1. sz. 1–31.

Csíkos Csaba (2003): Matematikai szöveges feladatok megértésének problémái 10-11 éves tanulók körében. *Magyar Pedagógia*, **103**. 1. sz. 35–55.

Csíkos Csaba, Szitányi Judit és Kelemen Rita (2010): Vizuális reprezentációk szerepe a matematikai problémamegoldásban. Egy 3. osztályos tanulók körében végzett fejlesztő kísérlet eredményei. *Magyar Pedagógia* **110**. évf. 2. sz. 149–166.

Csordás Mihály, Konfár László, Pintér Klára, Vincze Istvánné, Kozmáné Jakab Ágnes és Kothencz Jánosné (2011): *Sokszínű matematika – tankönyv 6*. Mozaik Kiadó, Szeged.

Daroczy, G., Wolska, M., Meurers, W. D. & Nuerk, H-C. (2015): Word problems: a review of linguistic and numerical factors contributing to their difficulty. *Frontiers in Psychology* April 2015, **6.** 348. sz. 1-13.

Fuchs, L., Fuchs, D., Seethaler, P.M. & Barnes, M. A. (2020): Addressing the role of working memory in mathematical word-problem solving when designing intervention for struggling learners. *ZDM Mathematics Education*, **52.** April, 87–96. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01070-8 (2021. 10. 04.)

Haghverdi, M. (2012): *Recognition of Student's Difficulties in Solving Mathematical Word Problems from the viewpoint of Teachers.* https://www.researchgate.net/publication/261548865_Recognition_of_Students%27_Difficulties_in_Solving_Mathematical_Word_Problems_from_the_Viewpoint_of_Teachers (2017.05.15.).

Hegarty, M., Mayer, R.E. &Monk, C.A. (1995): Comprehension of Successful an Unsuccessful Problem Solvers. *Journal of Educational Psychology*, **87**. 1. sz. 18–32.

Kerettanterv az általános iskola 1–4. évfolyama számára – Matematika 1–4. évfolyam. https://www.oktatas.hu/pub_bin/dload/kozoktatas/kerettanterv/Matematika_A.docx (2021. augusztus 18.).

Kerettanterv az általános iskola 5–8. évfolyama számára – Matematika 5–8. évfolyam. https://www.oktatas.hu/pub_bin/dload/kozoktatas/kerettanterv/Matematika_F.docx (2021. augusztus 18.)

Michael, Marc D. (2005): Arithmetic and algebra word problems: Preservice teachers' content knowledge, attitudes, and appreciation of students' strategies". *Graduate Theses, Dissertations, and Problem Reports. 4175.* https://researchrepository.wvu.edu/etd/4175 (2021. október 7.).

C. Neményi Eszter és R. Szendrei Julianna (1997): *Szöveges feladatok*. Budapest, Budapesti Tanítóképző Főiskola.

Kintch, W. & Greeno, J.G. (1985). Understanding and solving word arithmetic problems. *Psychological Review*, **92**. 1. sz. 109–129.

Paivio, A. & Begg, I. (1981): *Psychology of language.* New Yersey, Prentice Hall.

PISA, (2019): *PISA 2018 Összefoglaló jelentés*. Oktatási Hivatal. https://www.oktatas.hu/pub_bin/dload/kozoktatas/nemzetkozi_meresek/pisa/PISA2018_v6.pdf (2021. október 20.)

Pongsakdi, N., Kajamies, A., Veermans, K., Lertola, K., Vauras, M. & Lehtinen, E. (2020): What makes mathematical word problem solving challenging? Exploring the roles of word problem characteristics, text comprehension, and arithmetic skills. *ZDM Mathematics Education*, Vol. 52, April 87–96. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01118-9 (2021. október 10.)

Powell, S. R. & Fuchs, L. S. (2018): Effective Word-Problem Instruction: Using Schemas to Facilitate Mathematical Reasoning. *Teaching Exceptional Children*, **51**. 1. sz. 31–42. doi: 10.1177/0040059918777250.

Thevenot, C. & Barouillet, P. (2015): Word problem solving and mental representations. *The Oxford Handbook of Numerical Cognition*, Ed. Kadosh, R. C. and Dowker, A. Chapter 9.

Varga Noémi (2016): Szövegértési nehézségek a matematikaórán. *Anyanyelv-pedagógia* DOI: 10.21030/aqnyp. http://www.anyanyelv-pedagogia.hu/cikkek.php?id=611 (2016. január 3.)

Vásárhelyi Éva (2003): Problem solving with help of combination of different representation.

In: M Fothe, M. Hermann és B. Zimmermann (szerk.): *Learning in Europe: Computer in Mathematics Instruction*. Collegium Europaeum Jenense, Jena. 68–87.

Verschaffel, L., Van Dooren, W., Greer, B. és Mukhopadhyay, S. (2010): Reconceptualising word problems as exercises in mathematical modelling. *Journal für Mathematik-Didaktik*, Vol. 31, No. 1, 9–29.

Vidákovich Tibor és Csapó Benő (1996): A szövegesfeladat-megoldó készségek fejlődése. *Közoktatás-kutatás 1996/1997,* Oktatási Minisztérium, Budapest. 247–273.