Matematikai kompetenciák megjelenése a tanulók feladatmegoldásaiban

TÉGLÁSI ILONA

olahneti@ektf.hu

Eszterházy Károly Főiskola, Eger, Matematika Tanszék

Bevezető

„Azt kellene kérdezni, kinek a tudása a legjobb, nem azt, hogy ki tud a legtöbbet"

(Montaigne)

A matematikai tudás kettős: egyrészt olyan ismeretekből áll, amelyek a matematika, mint rendszer, mint tudomány alapját képezik – ez a „tudni mit" jellegű tudás, másrészt olyan eljárásokból, gondolkodásmódokból, stratégiákból tevődik össze, amelyek megmutatják, hogyan oldjuk meg a matematikai problémákat – ez a „tudni hogyan" jellegű tudás. A kettő szoros összefüggésben áll egymással, egyik sem működik a másik nélkül (Bruner 2004). Az utóbbi, a „tudni hogyan" jellegű tudás alatt értjük azokat a készségeket, képességeket, amelyekre a matematikai kompetencia kifejezést használjuk. A különböző források más-más módon közelítik meg a matematikai kompetenciát. A nehezen megfogalmazható definíció helyett egyre elterjedtebb a nemzetközi szakirodalomban a matematikai kompetencia következő (úgy nevezett PISA-féle) komponensekre való osztása (Niss 2003a, b):

1.	Matematikai gondolkodás	Képességek, melyek a matematikával kapcsolatos kérdésfelvetéssel és válaszadással kapcsolatosak.
2.	Problémafelvetés és -megoldás	
3.	Modellalkotás	
4.	Érvelés, bizonyítás	
5.	Reprezentáció	Készségek és képességek, melyek a matematika nyelvezetével és eszközeivel kapcsolatosak.
6.	Szimbólumok és formalizmus	
7.	Matematikai kommunikáció	
8.	Matematikai eszközhasználat	

1. táblázat: *PISA-kompetenciák*

Az intelligencia faktoranalízise és a tartalmi elemzések alapján e nyolc komponens további készségekre, képességekre bontható. Ezek között vannak szorosan a matematikai megismeréshez kapcsolódók, és vannak általánosabb gondolkodási, tanulási, tudásszerző, kommunikációs készségek és képességek is.

Egy besorolásuk a fenti komponensek alá a következő lehet:

1.	Matematikai gondolkodás:	rendszerezés, kombinativitás, analízis, szintézis, analógiás gondolkodás, logikai következtetés, valószínűségi következtetés.
2.	Problémafelvetés és -megoldás:	problémaérzékenység, problémareprezentáció,

		szövegértés, szövegértelmezés, eredetiség, hajlékonyság, rugalmasság, transzferálás, divergens és konvergens gondolkodás, feladattartás, kreativitás.
3.	Modellalkotás:	tervezés, tervszerűség, rész-egész észlelés, összefüggések keresése, asszociatív memória, metakogníció.
4.	Érvelés, bizonyítás:	deduktív és induktív következtetés, ítélőképesség, igazságérzet, általánosítás, logikai következtetés, ok-okozati viszonyok felismerése.
5.	Reprezentáció:	ábrázolás, térlátás, térbeli viszonyok észlelése, transzferálás, prezentáció, rész-egész észlelés.
6.	Szimbólumok és formalizmus:	szimbolikus gondolkodás képessége, emlékezet, függvényszerű gondolkodás, algoritmikus gondolkodás, értelmes memória, összefüggések felismerése.
7.	Matematikai kommunikáció:	reláció szókincs, érvelés, önreflexió, metakogníció, narratív memória, szövegértés, szövegértelmezés, figyelem.
8.	Matematikai eszközhasználat:	számlálás-számolás készsége, becslés, mennyiségi következtetés, mérés, deduktív és induktív gondolkodás, feladat-megoldási sebesség, algoritmikus gondolkodás.

2. táblázat: *Készségek és képességek besorolása*

A felsorolás nyilván nem teljes, és azt hiszem, soha nem is lesz az. Egy más megközelítésből más készségeket és képességeket is fel lehetne sorolni, esetleg egy-egy képesség több komponens alá is besorolható (mint ahogy én is tettem). Úgy gondolom, minél többet tudunk meg az emberi megismerésről és gondolkodásról annál részletesebb felsorolást adhatunk (Pléh 1998).

2000 óta, az Európai Unió Lisszaboni Konferenciája nyomán megfogalmazott ajánlások és a kulcskompetenciák meghatározása után hazánkban is egyre több olyan kiadvány jelent meg, amely a készségek és képességek fejlesztését célozza (Csapó 2003). A NAT koncepciója is erre épül, tankönyvcsaládok és feladatgyűjtemények, oktatási programcsomagok jelentek meg ebben a szellemben. Az új tendenciák megjelentek a tanárképzésben is (Czeglédy 2010). Az új módszerek, ha lassan is, de kezdenek elterjedni a közoktatásban. A palettából mégis hiányzik valami: az értékelés továbbra is a hagyományos, teljesítmény központú. Ha a matematikaoktatás fontos célja a készségek és képességek fejlesztése, akkor ennek meg kellene jelennie az értékelésben is a tárgyi tudás mérése mellett. A probléma az, hogy a képességeket sokkal nehezebb értékelni, mint a tárgyi tudást, a matematikai ismereteket. Az Országos kompetenciamérés értékelési rendszere meglehetősen bonyolult, így ezt nehéz lenne a hétköznapi használatba átültetni. Olyan módszerre lenne szükség, melynek segítségével a matematikatanár felismeri és fel tudja mérni a tanulók feladatmegoldásaiban megjelenő matematikai képességeket, készségeket. Ehhez szeretnék segítséget nyújtani a következőkben néhány tanulók által adott feladatmegoldás elemzésével.

Feladatok elemzése a matematikai készségek, képességek szempontjából

Ahhoz, hogy egy ilyen elemzéshez hozzákezdjünk, *„bele kell helyezkednünk a diákjaink elméjébe, és amennyire lehet, megpróbálni megérteni fogalmaik forrásait és erősségeit"* (Gardner 1991). A tapasztalt matematikatanár gyakran érzi azt egy dolgozat javítása közben, hogy egyik diák (esetleg hibás, nem teljes) megoldása „többet ér", mint egy másik hasonló megoldás, mert van benne valami, amit nehéz megragadni, mégis értékesebbnek tartjuk. Ez a nehezen körvonalazható valami a matematikai kompetencia, amely akkor is megnyilvánulhat, ha a tanuló tárgyi tudása az adott területen hiányos, vagy számolási hibát vétett. Természetesen az lenne az elérendő cél, hogy a kompetenciák és a tárgyi tudás egyszerre jelenjenek meg a megoldásban. A tárgyi tudás mérésére jól bevált módszereink vannak, a matematika érettségi feladatok javítási és pontozási útmutatója ehhez nagyon jó támpontot ad. A tanár fejlesztő munkájához és a tanulók ismereteinek alaposabb felméréséhez azonban meg kell próbálnunk más szemmel (is) nézni a feladatok megoldásait. Fel kell tudni ismerni, hogy a feladatmegoldás, problémamegoldás során milyen készségek, képességek aktivizálódtak, és melyek nem (ez segít eldönteni a további fejlesztés irányát is). Természetesen, egy adott feladat vagy probléma nem igényli az összes matematikai jellegű gondolkodási képesség, készség alkalmazását egyszerre – a tanár feladata, hogy beazonosítsa, melyek szükségesek az adott feladat megoldásához. Tanári pályám húsz éve alatt sok és sokféle tanulói feladatmegoldással találkoztam. Ezekből szeretnék néhányat bemutatni, elemezve a bennük megjelenő matematikai kompetenciákat. A feladatok között van órai munka, felmérés, dolgozat feladata – ezt jelzem az adott feladat leírásánál. Mind önálló tanulói munka. A feladatok megoldói középiskolai tanulók, többségük az egri Eszterházy Károly Gyakorló Gimnázium diákja.

1. példa: térgeometria, 12. évfolyam, órai munka (1. ábra)

A feladat: Mekkora annak a szabályos 24 oldalú egyenes gúlának a térfogata, amelynek alapéle 1,9 cm, és az oldallapok alaplappal bezárt szöge 87°11'?

Az *(1. ábra)* mutatja a feladat megoldását. Minden szöveges feladat megoldásának alapja a szövegértés, szövegértelmezés, ennek hiányában a tanulók el sem tudnák kezdeni a feladat megoldását. A térgeometria feladatokhoz szintén fontos a térlátás, ami a feladathoz készített ábrák alapján jónak mondható: az elsőként készített ábrán nem látszanak megfelelően az adatok, ezért a tanuló készített egy alkalmasabb nézetet. Jó a reprezentációs képessége, az ábrázolás alkalmas a feladat megoldásához. A tanuló tervszerűen dolgozott, jól használta a matematikai szimbólumokat, megtalálta a szükséges összefüggéseket, mennyiségi következtetéseket használt (a β és γ szögek meghatározása). A számológép használatában jártas, azt célszerűen használta. Fejlett az analitikus-szintetikus gondolkodása. Jól látszik a gyakorlottság a megoldásban, nincsenek felesleges lépések, jó a feladattartása. Természetesen egy jó megoldásról sokféle képesség leolvasható, de a kevésbé látványos megoldásokból is sok hasznos információt szerezhet a tanár.

2. példa: halmazelmélet, 9. évfolyam, dolgozat feladata (2. ábra)

A feladat: Az $M:=\{a; b; c; d; e; f\}$ alaphalmaz A, B, és C részhalmazairól a következőket tudjuk: $A \cap B=\{b\}$, $(A \cup B) \cap C=\{e; f\}$, $A \setminus C=\{b; c; d\}$, $C \setminus B=\{a; e\}$. Határozza meg az A, B, C halmazokat!

A tanuló helyesen értelmezte a főleg matematikai szimbólumokkal leírt feladatot (szövegértelmezés), és megfelelően reprezentálta azt *(2. ábra)*. Az adatok közti összefüggéseket érti, azokat helyesen rendszerezi. Jól használja a deduktív következtetést és a matematikai szimbólumokat. Egy új momentum is megjelenik: a Venn-diagramban a kisatírozott, először „rossz" helyen megjelenített elemek az önreflexió képességét mutatják, és a törekvést a teljes megoldásra.

3. példa: gondolkodási módszerek, 10. osztály, kompetencia-felmérés *(3. ábra és 4. ábra)*

A feladat: Enikő bankkártyájának négyjegyű PIN- kódját a következőképpen titkosítva írja noteszébe:
- a számban eggyel több az ezres, mint a tízes;
- az ezresek és tízesek számának szorzata megegyezik a százasok és tízesek számának szorzatával;
- a szám éppen tizenegyszerese az utolsó három jegyből álló száménak;
- a szám a 10 többszöröse.
Fejtsük meg a kódot!

Ennek a feladatnak két különböző tanulói megoldását mutatom be. Az első megoldásban *(3. ábra)* nyomon követhető az összefüggések keresése, a szimbolikus gondolkodás – ugyan még sajátságos egyedi szimbólumokat használ, de ezzel már eléri azt, ami a matematikai szimbólumok egyik fontos szerepe: a gondolkodás megkönnyítése, a munkamemória területeinek felszabadítása. Jól reprezentálja a feladatot, érti és értelmezi a szöveget, helyes a logikai következtetése. Sokkal többet végez „fejben", mint amennyit lejegyez, mégis gondolkodása jól követhető. A második megoldása ugyanennek a feladatnak *(4. ábra)* egy teljesen eltérő gondolkodásról tanúskodik: ő is jól értelmezi a feladat szövegét, de másképpen reprezentálja. Ez a megoldás a tervszerűségről, a jó kombinativitásról, az összefüggések kereséséről és végül a helyes logikai következtetésről árulkodik. Az előző tanulóhoz képest sokkal konkrétabb a gondolkodása, szimbolikus gondolkodása még kevésbé fejlett, de számolási készsége és feladattartása szintén jó.

4. példa: geometriai számítások, 11. évfolyam, felmérő (5. ábra)

A feladat: Egy derékszögű trapézba kör írható.
a) Mekkora a beleírható kör sugara, ha az alapok hossza 4 cm és 12 cm, a nem derékszögű szár pedig 1 dm?
b) Mekkorák az alapon fekvő szögek?
c) Mekkora a trapéz körön kívüli területe? Hány százaléka ez az eredeti trapéz területének?

A jó szövegértést és értelmezést mutatja a helyes ábrázolás *(5. ábra)*. Bár nincs túlságosan részletezve a megoldás, a tervszerűség és az analitikus gondolkodás nyomon követhető benne. Jól választotta ki a szükséges összefüggéseket, deduktív következtetést végzett a képletek alkalmazásakor. Jó a számolási készsége és az elektronikus számológépet is megfelelő helyen alkalmazta. Ez egy „szűkszavú", célratörő, de teljes megoldás. Jó a feladattartása és teljes megoldásra törekedett.

5. példa: rendszerező összefoglalás, 12. évfolyam, dolgozat *(6. ábra)*

Oldd meg a következő egyenleteket, egyenlőtlenségeket a valós számok lehető legbővebb halmazán, melyen értelmezhető! Add meg az alaphalmazt!

...*d)* $\lg(x-2)+\lg(27-x)<2$

Bár ez a megoldás nem teljes *(6. ábra)*, mégis nagyon sok matematikai képességről tanúskodik: a szimbolikus és az algoritmikus gondolkodásról, a tanult összefüggések kereséséről, a számolási készségről, a matematikai eszközhasználat fejlettségéről. De azt is leolvashatjuk róla, hogy a feladattartás nem elég jó, nem viszi végig a feladatot. Nem törekszik a teljes megoldásra, hiányzik az önreflexió a végén (bár a feladat elején még jelen volt, ott még javította hibáját). Ennek okai sokfélék lehetnek: például az idő vagy a motiváció hiánya – ezt a tanár a tanulót ismerve meg tudja állapítani.

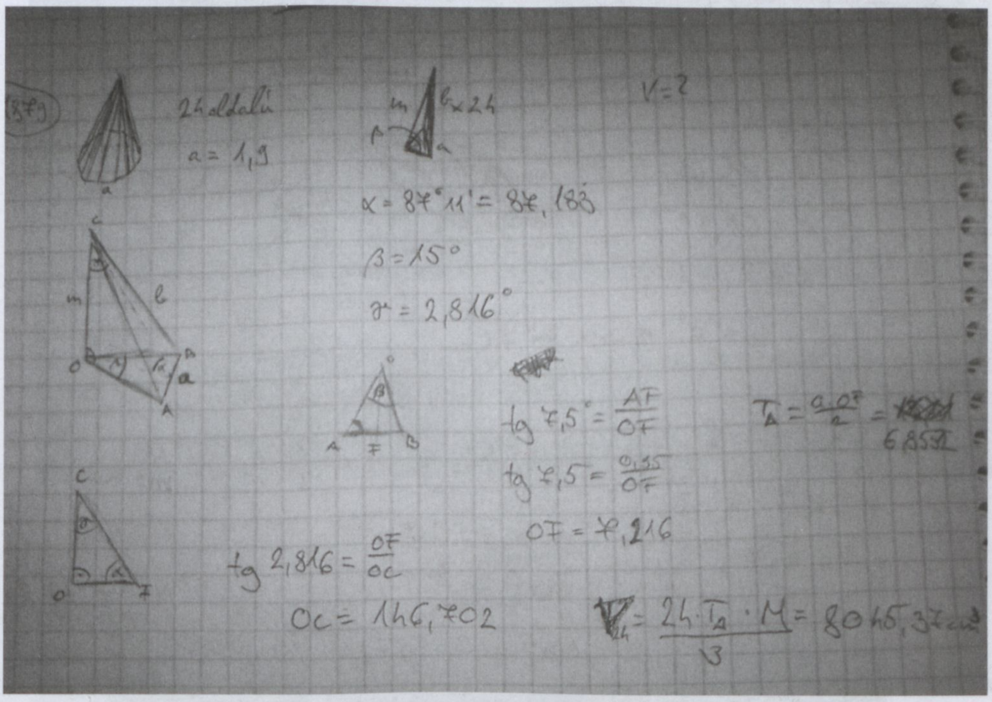
Miért tartom fontosnak ezt a látásmódot?

A bemutatott tanulói megoldások csak egy-egy kiragadott példát jelentenek. Bizonyára sok hasonlót látott már az olvasó is, és még sok más példát is lehetne hozni. Célom az volt, hogy megmutassam, nemcsak az eredmény helyessége szempontjából lehet vizsgálni egy-egy megoldást, hanem a felhasznált matematikai készségek, képességek szempontjából is. Szemléletváltás szükséges az értékelésben is, nemcsak a tanítási módszerekben. A készségek, képességek fejlesztését akkor lehet jól végezni, ha a fejlesztő munka eredményét is elemezni tudjuk. Ez a látásmód ad lehetőséget arra, hogy a további fejlesztés irányát meghatározzuk, felmérjük az erősségeket és a gyengeségeket mind a tanulók munkáiban, mind a saját tanítási gyakorlatunkban.

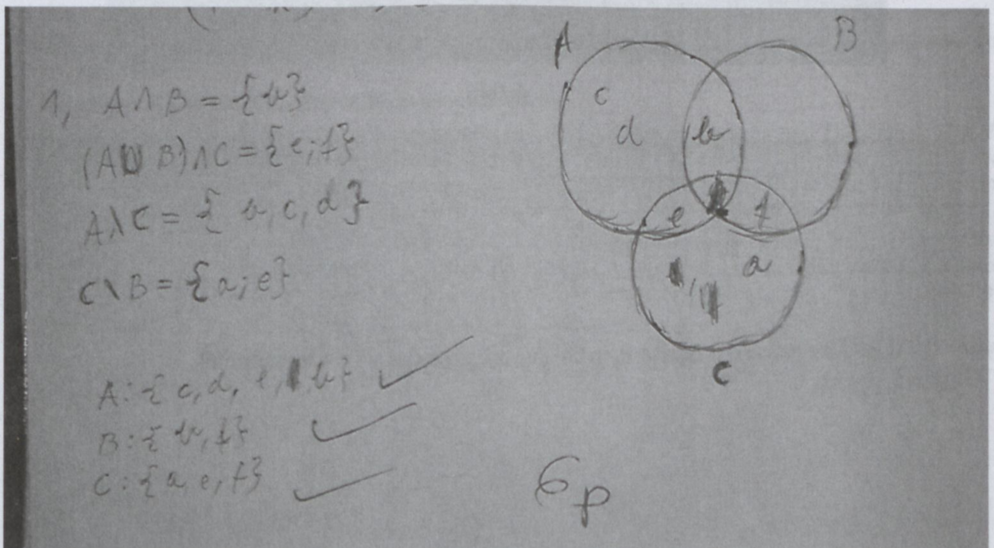
Az értékelésben ezt valóban nehezebb megjeleníteni, mint a matematikai teljesítményt. Hogy mégis hogyan lehet, arra egy korábbi cikkemben (Téglási 2010) mutattam módszert, és összehasonlítást a képességek és a teljesítmény között. A tanár által kiadott feladatok ilyen nézőpontból való elemzésére Czeglédy (2006) cikkében találunk példát.

Ezt a szemléletváltást már a tanárképzésben kell elkezdeni (feladatok elemzése abból a szempontból, hogy milyen képességeket, készségeket fejleszt). A kezdő tanár számára talán még fontosabb ennek a szemléletmódnak a tudatosítása, mint a már gyakorlattal rendelkezőknek, hiszen a gyakorlat kialakítja bennünk ezt a látásmódot. A gyakorló tanárok számára a kompetenciák fejlesztéséhez hasznos módszerekről, feladattípusokról vannak továbbképzések, hozzáférhető segédanyagok, de az értékelés átformálására eddig nem került sor. Remélem, írásom ezen a téren egy apró előrelépést jelent.

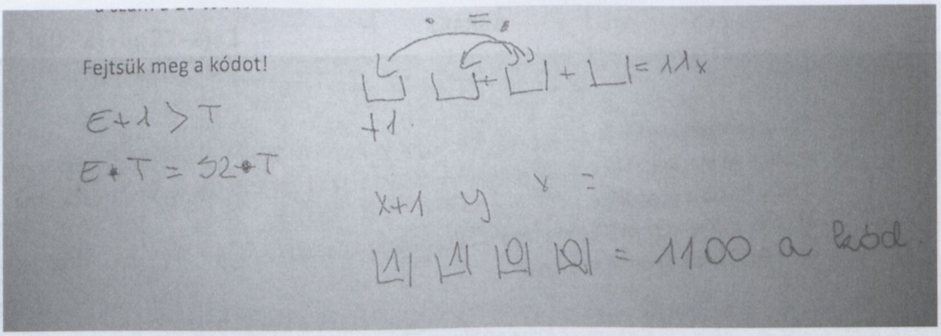
ÁBRÁK:



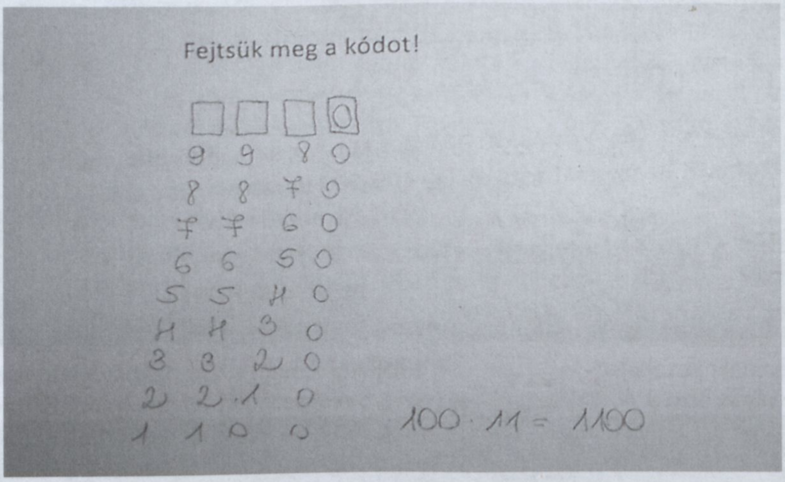
1. ábra



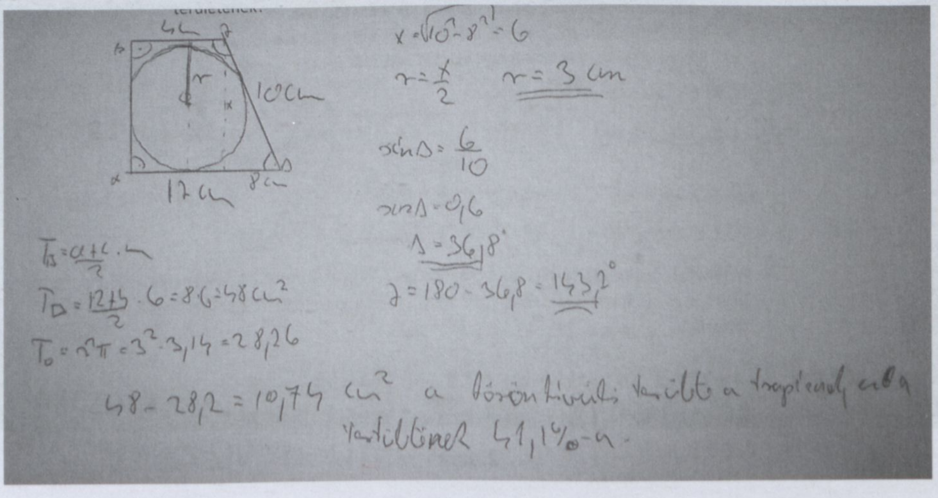
2. ábra



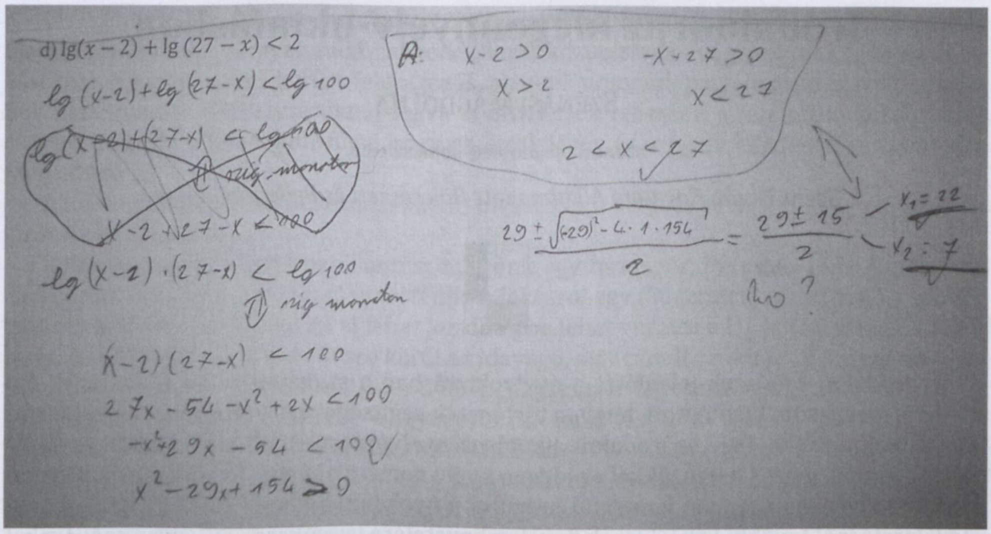
3. ábra



4. ábra



5. ábra



6. ábra

IRODALOM

Bruner, Jerome 2004: *Az oktatás kultúrája.* Budapest: Gondolat Kiadó.

Czeglédy István 2006: Teljes körű matematika tantárgyi képességmérés Miskolc város általános iskoláinak 5. osztályaiban. *Miskolci Pedagógus 41*, 1–15.

Czeglédy István 2010: *Kompetencia alapú matematikaoktatás.* EKF főiskolai jegyzet.

Csapó Benő 2003: *A képességek fejlődése és iskolai fejlesztése.* Budapest: Akadémiai Kiadó.

Gardner, Howard 1991: *The Unschooled Mind. How children think and how schools should teach.* New York: Basic Books.

Montaigne, Michel de 1992: *Esszék.* Pécs: Jelenkor Kiadó.

Niss, Mogens 2003a: Mathematical Competencies and the Learning of Mathematics: The Danish KOM Project. In: Gagatsis, Athanasios – Papastavridis, Stavros (szerk.): *Proceedings of the Third Mediterranean Conference on Mathematics Education.* Athen: Greek Mathematical Society, 116–124. [http://w3.msi.vxu.se/users/hso/aaa_niss.pdf – 2012.07.04.]

Niss, Mogens 2003b: Quantitative Literacy and Mathematical Competencies. In: Madison, Bernard – Steen, Lynn (szerk.): *Quantitative literacy: why numeracy matters for schools and colleges.* Princeton: National Council on Education and the Disciplines, 215–220. [www.maa.org/ql/pgs215_220.pdf – 2012.07.04.]

Pléh Csaba 1998: *Bevezetés a megismeréstudományba.* Budapest: Typotex Kiadó.

Téglási Ilona 2010: Mathematical Competencies Examined on Secondary School Students. *Annales Mathematicae et Informaticae 37*, 241–257.