Minden tudás alapja a verbális és a matematikai készség

BÁCSI JÁNOS

bacsi@jgypk.u-szeged.hu

Szegedi Tudományegyetem Juhász Gyula Gyakorló Általános és Alapfokú Művészeti iskolája, Napközi Otthonos Óvodája

Kulcsszavak: *kulcskompetenciák, anyanyelv, matematika, tantárgyköziség, intelligencia*

Minden információszerzés és -feldolgozás alapja az anyanyelvi és a matematikai kompetencia. Azoknál a tanulóknál, akiknél az anyanyelvi és a matematikai kompetencia optimálisan működik, a többi tárgy tanulásában sem jelentkezik probléma; azoknál viszont, akiknél e két kompetencia valamelyike vagy mindkettő deficites, a többi tantárgy tanulásában is fel fog lépni valamilyen szintű tanulási nehézség, ami kihathat a későbbi munkavégzés sikerére. Az sem elhanyagolható tény, hogy a kutatások szerint az anyanyelvi és a matematikai készség fejlettségi szintje determinálja az intelligenciát (Cionciolo–Sternberg 2007). Ha sikerül a két alapkompetenciát fejleszteni (alapkompetencia alatt az anyanyelvi és a matematikai kompetenciát értem), az kihat a többi tantárgy tanulásának a sikerére, így később a sikeres munkába állásra és munkavégzésre. Az intézményesített oktatás mindig kiemelt hangsúlyt fektetett a két alapkompetencia tanítására, fejlesztésére, de ezt tantárgyspecifikusan, külön-külön tette. Hipotézisem az, ha anyanyelvi példákon keresztül tudunk matematikai összefüggéseket demonstrálni, magyarázni, vagy matematikai összefüggések alapján mutatjuk meg, hogyan működik az anyanyelvünk, akkor ezzel fejleszteni tudjuk mindkét alapkompetenciát, vagyis egy tudatosabb, megtervezettebb tantárgyi koncentráció az anyanyelv és a matematika között mindkét alapkompetencia fejlődésére pozitívan fog hatni. Az anyanyelv szintaktikai és szemantikai szabályainak matematikai szabályokhoz hasonlításával, megfeleltetésével meg tudom könnyíteni a matematikai összefüggések megértését. Ezekre a megfeleltetésekre mutatok néhány példát dolgozatomban a reflexivitásra – irreflexivitásra, szimmetriára – antiszimmetriára, tranzitivitásra és a metszethalmaz fogalmára vonatkoztatva.

Az anyanyelv- és a matematikatanítás történetét nem kívánom áttekinteni, de annak illusztrálására, hogy e két alapkompetencia tanítása mindig kiemelt helyet kapott az intézményesített oktatás keretében, álljon itt néhány példa a teljesség igénye nélkül!

Az intézményesített oktatás kezdete a Kr.e. 4. évezredre datálható (Mészáros–Németh–Pukánszki 1999), a sumerek városaiban jelent meg, ahol az írnokképző templomiskolákban írni tanultak, valamit fordítani sumerről akkádra, és még matematikát és geometriát tanultak, vagyis minden tantárgy az anyanyelvi és a matematikai kompetenciához kötődött.

A középkor nagy részét az intézményesített oktatás keretében a hét szabad művészet tanítása ölelte fel, vagyis a trivium: grammatica, retorica, dialectica és a quadrium: astronomia, aritmetika, geometria, musica. A trivium minden tárgya a szövegértéshez és/vagy a szövegalkotáshoz kapcsolódott, vagyis az anyanyelvi kompetenciához. A guadrium elemei pedig a – musica kivételével – a matematikai kompetenciához.

A népiskolákban első osztályban hat tantárgyat tanítottak, melynek heti óraszámai a következők voltak (1868: XXXVIII törvényczikk a népiskolai közoktatás tárgyában):

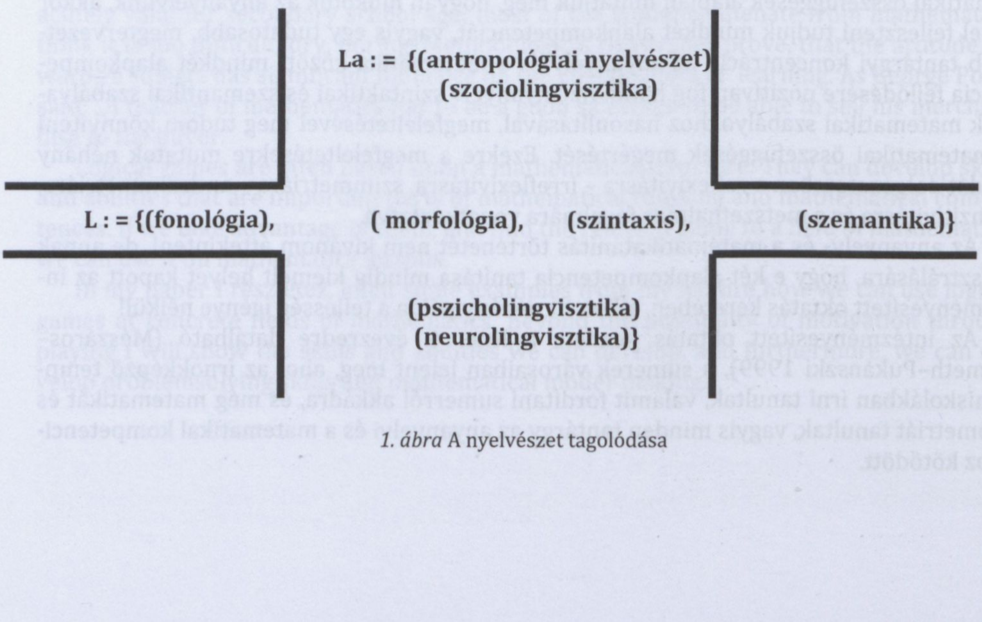
1. beszéd- és értelemgyakorlat (3 óra),
2. olvasás–írás (8 óra),
3. szám- (és mértan) (5 óra),
4. hit- és erkölcstan (2 óra),
5. éneklés (2 óra),
6. testgyakorlás (2 óra).

A fentiekből megállapítható, hogy a teljes órakeret 72%-át fordították a két alapkompetencia fejlesztésére a XIX. század második felében a népiskolai tantervben.

Végül nézzük meg, mit mondanak az óraszámok a matematika és a magyar nyelv és irodalom tantárgyak esetén 1–4. osztályban (Nemzeti alaptanterv 2012) az érvényben lévő tantervek alapján:

Magyar nyelv és irodalom esetén a teljes órakeret minimum 27%-a, maximum 40%-a fordítható a tantárgy tanítására, a matematika esetén ez az arány minimum 13%, maximum pedig 20%. Vagyis mind a két tantárgyat figyelembe véve átlagban a teljes órakeret minimum 20%-a, maximum 30%-a fordítható e két tantárgy tanítására. Ez az arány elégségesnek mondható, bár ha az eddig elmondottakat átgondoljuk, megállapítható, hogy a két tárgy aránya a többi tantárgyhoz viszonyítva az idő függvényében csökkenést mutat, de e tényt érintő okok feltárása túlmutat a tanulmány keretein és céljain.

Az anyanyelv és a matematika szorosabb tantárgyi koncentrációjának megteremtésében kiindulhatunk abból, hogy a nyelv definiálására halmazt használunk, mint azt az 1. ábra mutatja (Bácsi 2001), nem pedig a nyelvi rendszerre vonatkozó természetes nyelven megfogalmazott definíciót (Telegdi 1977, A. Jászó 1995, Cristal 2003).



1. ábra A nyelvészet tagolódása

Az első ábrán a nyelv horizontális tagolása (fonológia, morfológia, szintaxis és szemantika) a leíró nyelvészet egységeit mutatja, amelyet halmazként definiáltunk. A vertikális tagolás pedig az alkalmazott nyelvészet elemeit definiálja, szintén halmazként. Ebben a munkában csak a horizontális tagolás elemeivel foglalkozom. Ha a nyelvet egy olyan halmazként definiáljuk, amelynek elemei szintén halmazok, akkor ezeket a halmazokat is definiálni kell. Ez a megközelítés nem jelenthet a gyermekeknek nehézséget, hiszen már alsó tagozatban megtanulták, hogy a halmazt úgy határozzuk meg, hogy vagy felsoroljuk a halmaz összes elemét, vagy azt a szabályt adjuk meg, amely definiálja a halmaz összes elemét. Ezek után feltehetjük a kérdést, hogy a nyelv definíciójában szereplő négy halmaz közül melyik az elemhalmaz. A helyes válasz a morfológia, hiszen az egynyelvű értelmező szótárak sorolják fel betűrendben az adott nyelv szavainak értelmezéseit. Ha nem ismerem egy szó lexikai jelentését, akkor az értelmező szótárban kereshetem meg. A fonológia már szabályhalmaz, hiszen úgy tudjuk definiálni a fonémákat, hogy megadjuk a képzés helyét, a képzés módját és egy megkülönböztető jegyet. A szintaxis szintén szabályhalmaz, azokat a szabályokat tartalmazza, amelyek előállítják az adott nyelv összes grammatikailag jól formált mondatát, és csak azokat. (A mondatok sorozata végtelen, hasonlóan a természetes számok sorozatához.) A szemantika szabályhalmaz, azokat a szabályokat tartalmazza, amelyek segítségével a nyelv és a világ között lehet kapcsolatot teremteni. Ha tehát a nyelv meghatározását halmazok meghatározásával közelítem meg, segítem a matematikatanítást azzal, hogy erősítem a halmaz definiálhatóságának kritériumait.

Segíthet a matematikai és az anyanyelvi szabályok „hasonlóságainak" a feltárásában az a tény, hogy a legtöbb tanulónak könnyebb a terminális szimbólumokkal leírt szabályoktól a nem terminális szimbólumokkal leírt szabályokig eljutni, mint fordítva. Nézzünk erre néhány példát! A probléma megértéséhez először egy nem terminális szimbólumokkal megfogalmazott állításból induljunk ki: a reflexivitás azt jelenti, hogy $x \rho x$ (olvasd természetes nyelven: *„x róban áll x-szel")*. Ha először ezzel a nem terminális szimbólumok segítségével megfogalmazott definícióval találkozunk, lehet, hogy nehéz lesz a meghatározás interpretálása. Induljunk ki tehát a természetes nyelvi példákból! Mit jelent az, hogy *„Fésülködöm"*? Én fésülöm magam. Vagyis a mondat alanya és tárgya ugyanaz a személy, hiszen az igében megnevezett cselekvés az igealanytól indul ki, és amit cselekszik, az vissza is hat önmagára, az alanyra, ami az adott mondatban a nyelvtani tárggyal van kifejezve. Gyűjtessünk még ilyen példákat! *Borotválkozik, mosakszik, öltözködik, törülközik, mozgolódik* stb. Ha a kifejezéseket mondatokba foglaljuk, megállapíthatjuk, minden mondatban az alany ugyanaz a személy, vagyis a mondat alanya = a mondat tárgyával, tovább haladva, A = T, matematikai szimbólumokkal kifejezve: alany = x, tárgy = y, vagyis x = y. És így juthatunk el a matematikához, hiszen a matematikában a reflexivitás azt jelenti, hogy egy szám önmagával véve relációban van, ha x = y, akkor igaz a reláció. Ilyen például az egyenlőség: x = x. A leíró nyelvészet a reflexív igéket visszaható igéknek nevezi, éppen azért, mert az alany cselekvése visszahat az alanyra. De a tantárgyi koncentráció jobb megvalósításáért miért ne nevezhetnénk a visszaható igéket reflexív igéknek? Ha reflexívnek is nevezzük a visszaható igéket, akkor az igéket a reflexivitás alapján két csoportba oszthatjuk: 1. reflexív igék (pl. a fent már említett *borotválkozik, mosakszik, öltözködik, törülközik, mozgolódik* stb., 2. irrfeflexív igék (pl. *bánt, eszik, félt, néz, szeret* stb.). Ennek ismeretében már könnyen magyarázható a visszaható névmások szerepe a nyelvben, hiszen a fenti ismeretek függvényében megállapíthatjuk, hogy a visszaható névmásoknak az a szerepe, hogy egy irreflexív kifejezést reflexívvé tesznek. Például: *Pé-*

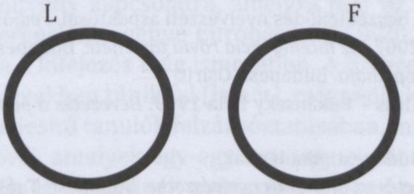
ter bántja önmagát. Én eszem magam. A lányok féltik magukat. Nézed magad. Szeretjük magunkat stb. Az alanyokat és a tárgyakat nem terminális szimbólumokkal kifejezve a következő kifejezéseket kapjuk: *x bántja y-t, x eszi y-t, x félti y-t, x nézi y-t, x szereti y-t.* Az igéket is nem terminális szimbólummal helyettesítve: $x \rho y$. A reflexivitás alapján x = y, vagyis $x \rho x$, tehát a kifejezések reflexívek. Az ellenpróbát is elvégezhetjük. Ha egy kifejezés reflexív, nem tehető bele a visszaható névmás, mert agrammatikus lesz a mondat. Például: *Péter borotválkozik magát. A fiú mosakszik magát. Éva öltözködik magát. A gyerekek törölköznek magukat. Az egész osztály mozgolódik magukat.* stb.

A szimmetria és antiszimmetria esetén a természetes nyelvi példák vizsgálatából induljunk ki. Hasonlítsuk össze a két mondat jelentését! a) *Pista veri Jóskát.* b) *Pista és Jóska verekszenek.* Az a) mondat elemzéséből kiderül, hogy az alany cselekvése a tárgyra irányul, ugyanakkor a tárgy semmilyen hatást nem vált ki az alanyra. A b) mondat elemzése viszont azt mutatja, hogy a két alany ugyanazt a cselekvést végzi, a b) mondatot át lehet alakítani úgy, hogy ez az állítás az iránytárgyakra vonatkoztatva egyértelmű legyen: *Pista veri Jóskát, és Jóska veri Pistát.* Mindez nem terminális szimbólumokkal kifejezve a következő: Pista = x, Jóska = y, veri = ρ, vagyis $\mathbf{x} \rho y \rightarrow y \rho x$, tehát a verekszik kifejezés szimmetrikus. Így a kifejezéseket az alapján is csoportosíthatjuk, hogy szimmetrikusak vagy antiszimmetrikusak. Szimmetrikus kifejezés például a *verekszik, találkozik, csókolózik, kezet fog, összeismerkedik* stb. Hiszen x csak úgy tud verekedni y-nal, ha y is verekszik x-szel, x csak akkor találkozik y-nal, ha y is találkozik x-szel. Vagy például a *csókol* igét az különbözteti meg a *csókolózik* igétől, hogy az első antiszimmetrikus, a második pedig szimmetrikus. Antiszimmetrikus kifejezés például a *megöl, elgázol, magyaráz, buzdít, könyörög* stb. Egy antiszimmetrikus kifejezést is szimmetrikussá tudunk tenni, erre való nyelvünkben az *egymás* kölcsönös névmás. Mint láttuk, a *megöl* tipikusan antiszimmetrikus, de a *megölik egymást* kifejezés már szimmetrikus. Hasonló ellentét figyelhető meg az *elgázol*, de *elgázolják egymást*, *magyaráz*, de *magyaráznak egymásnak*, *buzdít*, de *buzdítják egymást*, *könyörög*, de *könyörögnek egymásnak* stb. párokban. Az ilyen természetes nyelvi példák gyűjtésén és elemzésén keresztül könnyebb eljutni a matematikában használatos szimmetria definícióhoz.

A tranzitivitás fontos helyt foglal el mind az anyanyelvben, mind a matematikában. A természetes nyelvben a tranzitív kifejezések a relációs szókincs egy részét alkotják. Ha a gyermekeknél limitált a relációs szókincs tranzitív része, vagy deficites azok interpretációja, akkor a matematikában sem lesznek képesek megérteni a tranzitivitás fogalmát. Talán ebben a relációs szókincstípusban áll egymáshoz legközelebb a matematika és az anyanyelv. Tranzitív relációs szavaink például *kisebb – nagyobb, több – kevesebb, hosszabb – rövidebb, magasabb – alacsonyabb, idősebb – fiatalabb* stb. Ezek a kifejezések kivétel nélkül ellentétpárba rendezhetők, hiszen ha egy melléknévnek van középfoka, akkor ellentétes jelentésű párjának is lennie kell. A természetes nyelvben ezek a kifejezések rendezik valamilyen szempont szerint az entitásokat. Például *ha a ház kisebb a toronynál, a torony pedig kisebb a felhőkarcolónál, akkor a ház is kisebb a felhőkarcolónál*, vagy *ha Péter magasabb Évánál, Éva pedig magasabb Samunál, akkor Péter is magasabb Samunál* stb. A következő lépésként itt is bevezethetjük a szereplők helyett a nem terminális szimbólumokat: *x kisebb y-nál, y kisebb z-nél, akkor y kisebb z-nél.* Majd bevezethetjük a relációs szavak helyett a matematikai jeleket, így eljutunk a tranzitivitás matematikai definíciójához: $x \rho y \,\&\, y \rho z \rightarrow x \rho z$.

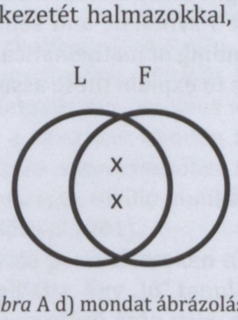
Ha megismertük a reflexivitás – irreflexivitás, szimmetria – antiszimmetria, tranzitív – nem tranzitív fogalmakat, megvizsgálhatunk két kitüntetett relációt, a rendezési és az ekvivalenciarelációt. A rendezési reláció esetén olyan relációról van szó, amely reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív. Rendezési reláció jellemzi aktuális világunkban az időt, amelyet az igeidőkkel, a határozószókkal és a melléknévi igenevekkel tudunk kifejezni. Ez a relációs rendszer 4 éves korra már kifejlődik a gyermekekben, de a szövegekben történő értelmezése csak 10 éves korra várható el, így merészség előtte olyan matematikafeladatot adni a gyerekeknek, amely a rendezési reláció alkalmazását követeli meg. A szövegértéshez nélkülözhetetlen a rendezési reláció értelmezése, ahol maga a szöveg, illetve a szövegben szereplő entitások tekinthetők egy halmaz elemeinek, amelyen a különböző rendezési szempontokat értelmezni kell. Ekvivalencia-relációról akkor beszélünk a matematikában, ha a reláció egyszerre reflexív, szimmetrikus és tranzitív. A legegyszerűbb, mégis talán legfontosabb példa az egyenlőségreláció. Számtalan más területen is találunk példát az ekvivalenciarelációra, például a logikai ekvivalencia a logikában, izomorfizmus az absztrakt algebrában, kongruencia a számelméletben, az „úttal való elérhetőség" gráfok csúcsai között, síkidomok egybevágósága és hasonlósága stb.

Végül nézzünk példákat a metszethalmaz fogalmának tanítására úgy, hogy most is természetes nyelvi példákból indulunk ki a mondat grammatikai jólformáltságát vizsgálva. Miért nem jó a következő c) mondat? c) *Ló fut.* Azért nem, mert grammatikailag nem jólformált. Hiányzik belőle valami. Ha lerajzoljuk a fenti mondat jelentését halmazokkal, láthatóvá válik a deficit a 2. ábrán.



2. ábra A c) mondat ábrázolása

Az ábráról leolvasható, hogy azért nem tekinthető jólformált mondatnak a c), mert azt jelenti halmazokkal ábrázolva, hogy van a *lovak halmaza* = L, és a *futó egyedek halmaza* = F, de a két halmaz között nincs semmilyen kapcsolat. Hogyan hangoznának azok a mondatok, amelyek azt jelentenék, hogy a *lovak halmazának* = L, és a *futó egyedek halmazának* van metszete, és a metszet nem üres! Minden válasz jó, amelyben a mondat a főnév előtt tartalmaz determinánst. Például: *A ló fut. Egy ló fut. Két ló fut. Öt ló fut. 8,4 ló fut. Néhány ló fut. Sok ló fut stb.* (A *8,4 ló fut.* mondat grammatikailag jólformált, csak a jelentése nem szokásos.) Válasszuk ki a fenti mondatlistából a *Két ló fut.* mondatot, és jelöljük d)-vel. Rajzoljuk le a d) mondat szerkezetét halmazokkal, és vizsgáljuk meg, mit jelent! (3. ábra)



3. ábra A d) mondat ábrázolása

A harmadik ábráról leolvasható, hogy a *lovaknak* és a *futó egyedek* halmazának van metszete, és a metszetben pontosan kettő elem van, vagyis kettő elemre igaz egyszerre, hogy *ló* is, és *fut* is. Ha lerajzoljuk a többi mondat jelentését is, könnyen eljutunk a metszethalmaz fogalmának matematikai értelmezéséhez, vagyis ha L és F halmazok, akkor $L \cap F$ jelöli a metszetüket vagy közös részüket, azaz azt a halmazt, amely pontosan L és F közös elemeit tartalmazza, így rendelkezik mind az L mind az F jellemző tulajdonságaival.

Néhány példát mutattam arra, hogy a matematika és az anyanyelv tanításában a két tantárgy anyagának közelítése miért és hogyan segítheti mind az anyanyelvi, mind a matematikai kompetencia fejlődését. Fontos lenne, hogy a közoktatásban egymásra találjon ez a két tárgy, mert a közoktatásban még nem lehetnek bölcsészek vagy természettudósok, csak intelligens, okos emberek, és hogy a felsőoktatásban valaki sikeres bölcsésszé vagy természettudóssá váljon, ahhoz rendelkeznie kell megfelelő matematikai és anyanyelvi kompetenciával.

IRODALOM

110/2012. (IV.4.) Kormányrendelet a Nemzeti alaptanterv kiadásáról, bevezetéséről és alkalmazásáról. [http://njt.hu/cgi_bin/njt_doc.cgi?docid=149257.256438 – 2015.11.27.]

1868:XXXVIII törvényczikk a népiskolai közoktatás tárgyában. Pest: Kiadja Ráth Mór.

A. Jászó Anna (szerk.)1995: *A magyar nyelv könyve.* Budapest: Trezor.

Bácsi János 2001: A megkésett beszédfejlődés nyelvészeti aspektusai. *Pediáter,* 10. 75–81.

Cincialo T. A. – Sternberg J. R. 2007: *Az intelligencia rövid története.* Budapest: Corvina.

Crystal, D. 2003: *A nyelv enciklopédiája.* Budapest: Osiris.

Mészáros István – Németh András – Pukánszky Béla 1999: *Bevezetés a pedagógia és az iskoláztatás történetébe.* Budapest: Osiris.

Rédei László 1954: *Algebra I.* Budapest: Akadémiai.

Telegdi Zsigmond 1977: *Bevezetés az általános nyelvészetbe.* Budapest: Tankönyvkiadó.

All knowledge is based on verbal and mathematical skills

My hypothesis is if we are able to explain and demonstrate mathematical problems through examples taken from mother tongue learning or if we can offer some insights in the approach of mother tongue learning by describing mathematical problems, both basic competencies can be developed; that is a more conscious and better planned cross-curricular collaboration of these two subjects will have a positive influence on the development of both basic -mother tongue and mathematical – competencies.

Comparison of mother tongue's syntactic and semantic rules to mathematical rules will positively influence understanding of mathematical problems.

I am looking at some examples to explain these assumptions.